

Jürgen Hedderich • Lothar Sachs

# Angewandte Statistik

Methodensammlung mit R

15., überarbeitete und erweiterte Auflage

# Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis .....	ix
Verzeichnis der Übersichten .....	xxi
Abbildungsverzeichnis .....	xxiii
Tabellenverzeichnis .....	xxix
<b>1 Einführung .....</b>	<b>1</b>
1.1 Definition und Aufgaben der Statistik .....	1
1.2 Wissenschaftliche Arbeitstechnik .....	3
1.2.1 Daten und Modelle .....	3
1.2.2 Kreisprozesse .....	3
1.2.3 Modelle in der Statistik .....	6
1.3 Statistik und wissenschaftliche Methode .....	8
1.3.1 Wiederholbare Erfahrungen .....	8
1.3.2 Inferenz: Deduktion und Induktion .....	9
1.3.3 Beobachtungsstudien .....	10
1.3.3.1 Hinweise zu einer Befragung .....	11
1.3.3.2 Hinweise zu einer Erhebung .....	11
1.3.4 Systematische Fehler (Bias) .....	12
1.3.5 Deskriptive Statistik .....	14
1.3.5.1 Dimensionalität .....	14
1.3.5.2 Data Editing .....	15
1.3.6 Explorativer Ansatz .....	15
1.3.7 Konfirmativer Ansatz .....	16
1.3.8 Merkmale, Grundgesamtheit, Stichprobe .....	17
1.3.8.1 Offene und geschlossene Grundgesamtheiten .....	18
1.3.9 Stichproben .....	19
1.3.10 Zufallsstichproben .....	19
1.4 Datenanalyse .....	20
1.4.1 Merkmalsarten .....	20
1.4.2 Variablen-Übersicht .....	21

	1.4.2.1 Zulässige Skalentransformationen .....	24
	1.4.3 Datenstruktur, Datengewinnung und Datenerfassung .....	24
<b>2</b>	<b>Grundlagen aus der Mathematik .....</b>	<b>28</b>
2.1	Logische und relationale Operatoren .....	28
2.2	Mengen .....	29
2.2.1	Begriffsbildung .....	29
2.2.2	Mengenoperationen .....	30
2.3	(Grund-) Rechenarten .....	32
2.3.1	Summen und Produkte .....	32
2.3.1.1	Das Summenzeichen .....	32
2.3.1.2	Spezielle Summen .....	35
2.3.1.3	Multiplikation und Division; Fakultät .....	36
2.3.2	Potenzen und Wurzeln .....	37
2.3.3	Logarithmen .....	39
2.3.4	Rundungen .....	40
2.3.5	Rechnen mit fehlerbehafteten Zahlen .....	42
2.4	Einführung in die Matrixalgebra .....	43
2.4.1	Definition und Schreibweise .....	43
2.4.2	Matrixoperationen .....	44
2.4.2.1	Matrixaddition und -subtraktion .....	44
2.4.2.2	Matrixmultiplikation .....	45
2.4.3	Determinanten .....	47
2.4.4	Die Inverse Matrix .....	48
2.4.5	Lineare Abhängigkeit, Rang einer Matrix .....	48
2.4.6	Lineare Gleichungssysteme .....	49
2.4.7	Eigenwerte und Eigenvektoren .....	50
2.5	Funktionen .....	51
2.5.1	Lineare Funktionen .....	51
2.5.2	Nichtlineare Funktionen .....	52
2.5.2.1	Polynomfunktionen .....	52
2.5.3	Periodische Funktionen .....	53
2.5.4	Exponentialfunktion und logarithmische Funktion .....	54
2.5.4.1	Wachstumsfunktionen .....	54
2.5.5	Fläche unter einer Funktion: Integral .....	56
2.6	Kombinatorik .....	57
2.6.1	Permutationen .....	57
2.6.2	Binomialkoeffizient .....	59
2.6.2.1	Rechnen mit dem Binomialkoeffizienten - weitere Formeln .....	60
2.6.3	Kombinationen .....	61
2.6.4	Zerlegung einer Menge .....	62
2.6.5	Bootstrap-Stichproben .....	63
2.6.6	Das Pascalsche Dreieck .....	63
2.6.7	Der Multinomialkoeffizient .....	65
<b>3</b>	<b>Deskriptive Statistik .....</b>	<b>66</b>
3.1	Häufigkeiten .....	67
3.1.1	Absolute und relative Häufigkeiten .....	67
3.1.2	Sinnvolle Quotienten: Verhältniszahlen .....	69
3.1.3	Prozentwerte .....	71
3.1.4	Balken- und Kreisdiagramme .....	71
3.1.5	Tabellen .....	72

3.1.5.1	Rechteckdiagramm und Mosaikplot .....	74
3.1.6	Bedingte Häufigkeiten .....	74
3.1.6.1	Simpson's Paradox (Vergleich von Anteilswerten) .....	74
3.1.6.2	Assoziationsmaße für Kontingenztafeln: Tau-GK und Varianten ..	75
3.2	Beschreibung von Ordinaldaten .....	77
3.2.1	Medianwert und andere Quantile .....	78
3.2.2	Klassierte Beobachtungen: Berechnung von Quantilen .....	79
3.2.3	Streuung ordinal skalierten Daten .....	80
3.2.4	Punktdiagramm und Box-Plot .....	81
3.2.5	Korrelationskoeffizient nach Kendall .....	82
3.2.6	Partielle Rangkorrelation .....	84
3.3	Beschreibung von metrischen Daten .....	86
3.3.1	Arithmetischer Mittelwert .....	87
3.3.2	Standardabweichung, Varianz .....	89
3.3.3	Ergänzung und Kombination von Mittelwerten und Varianzen .....	90
3.3.4	Variationskoeffizient .....	91
3.3.5	Fehlerbalken .....	92
3.3.6	Mittelwert und Standardabweichung aus klassierten Messwerten .....	92
3.3.7	Das gewogene arithmetische Mittel und die gewogene Varianz .....	93
3.3.8	Geometrischer Mittelwert .....	95
3.3.9	Harmonischer Mittelwert .....	99
3.4	Fehlerrechnung .....	102
3.4.1	Fehler in Messungen .....	102
3.4.2	Standardfehler von Mehrfachbestimmungen .....	103
3.4.3	Fehlerfortpflanzung .....	104
3.4.4	Präzision von Messungen .....	105
3.4.5	Reliabilitätsanalyse .....	108
3.5	Häufigkeitsverteilung .....	110
3.5.1	Histogramm .....	110
3.5.2	Stamm-Blatt Darstellung .....	113
3.5.3	Pareto-Diagramm .....	114
3.6	Konzentrationsmaße: Herfindahl-Index und Gini-Koeffizient .....	115
3.7	Maßzahlen für den Zusammenhang metrischer Daten .....	117
3.7.1	Punktwolken .....	118
3.7.2	Empirische Kovarianz .....	119
3.7.3	Empirischer Korrelationskoeffizient .....	119
3.7.4	Autokorrelation .....	121
3.7.5	Rangkorrelationskoeffizient .....	123
3.7.5.1	Spearman'sche Rangkorrelation bei Bindungen .....	124
3.7.6	Typisierung korrelativer Zusammenhänge .....	124
3.7.7	Partieller Korrelationskoeffizient .....	126
3.7.7.1	Multipler Korrelationskoeffizient .....	127
3.7.8	Lineare Regression .....	128
3.7.9	Spezielle Schätzungen der Regressionsgeraden .....	131
3.7.9.1	Das Bartlett-Verfahren .....	131
3.7.9.2	Das Kerrich-Verfahren .....	132
3.7.9.3	Orthogonale kleinste Quadrate .....	133
3.7.10	Robuste lineare Regression .....	134
3.7.11	Nichtlineare Regression .....	136
3.7.11.1	Einige linearisierende Transformationen .....	143
3.8	Nichtparametrische Regression .....	146

3.8.1	Regressogramm, gleitende Mittelwerte und Kernschätzer .....	146
3.8.2	Kubische Spline-Interpolation .....	148
<b>4</b>	<b>Wahrscheinlichkeiten</b> .....	<b>150</b>
4.1	Zufallsexperiment, Ereignis .....	151
4.2	Begriff der Wahrscheinlichkeit .....	154
4.2.1	Definition nach Laplace .....	154
4.2.1.1	Relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit .....	155
4.2.1.2	Chancen (Odds) .....	155
4.2.2	Axiome nach Kolmogoroff .....	156
4.2.3	Additionssatz .....	157
4.2.3.1	Einschluss- und Ausschlussformel (Siebformel) .....	158
4.2.4	Paradoxon der ersten Ziffer (Benford's Law) .....	161
4.3	Bedingte Wahrscheinlichkeiten, stochastische Unabhängigkeit .....	162
4.3.1	Bedingte Wahrscheinlichkeit .....	162
4.3.1.1	Multiplikationssatz .....	162
4.3.1.2	Risikomaße .....	164
4.3.1.3	Wahrscheinlichkeiten aus einer Sterbetafel .....	165
4.3.1.4	Baumdiagramm und Pfadregeln .....	166
4.3.2	Stochastische Unabhängigkeit .....	167
4.3.2.1	Stochastische Unabhängigkeit für drei und mehr Ereignisse .....	169
4.3.2.2	Unvereinbarkeit und stochastische Unabhängigkeit .....	170
4.3.2.3	Ungleichungen nach Bonferroni .....	170
4.3.2.4	Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Korrelation .....	171
4.3.2.5	Dreizehn Beispiele zur stochastischen Unabhängigkeit .....	171
4.4	Bayessches Theorem .....	175
4.4.1	Bayessches Theorem und Pfadregel .....	177
4.4.2	Acht Beispiele zum Bayesschen Theorem .....	178
4.5	Der diagnostische Test .....	180
4.5.1	ROC - Analyse .....	185
4.5.2	Der Likelihoodquotient .....	186
4.5.3	Entscheidungsanalyse nach A.J. Vickers .....	189
4.6	Maßzahlen in der Epidemiologie .....	191
4.6.1	Prävalenz und Inzidenz .....	191
4.6.2	Standardisierte Raten am Beispiel der Mortalität .....	193
<b>5</b>	<b>Zufallsvariablen, Verteilungen</b> .....	<b>196</b>
5.1	Die Zufallsvariable .....	196
5.1.1	Wahrscheinlichkeitsfunktion, Wahrscheinlichkeitsdichte und Verteilungsfunktion .....	197
5.1.1.1	Rechenregeln zur Verteilungsfunktion .....	201
5.1.1.2	Empirische Verteilungsfunktion .....	202
5.2	Maßzahlen zur Kennzeichnung einer Verteilung .....	202
5.2.1	Erwartungswert .....	203
5.2.2	Varianz .....	204
5.2.2.1	Ungleichungen mit Wahrscheinlichkeiten .....	206
5.2.3	Momente: Schiefe und Exzess .....	209
5.2.3.1	Berechnung der empirischen Momente .....	210
5.2.3.2	Potenzmomente .....	211
5.2.3.3	Quantilmaße zu Schiefe und Exzess .....	215
5.3	Diskrete Verteilungen .....	216
5.3.1	Das Urnenmodell .....	216

5.3.2	Gleichverteilung	218
5.3.3	Binomialverteilung	219
5.3.3.1	Bernoulli-Versuch	219
5.3.3.2	Binomial-Verteilung	220
5.3.3.3	Approximation der Binomialverteilung durch die Standardnormalverteilung	227
5.3.3.4	Approximation der Binomialverteilung durch die Poisson-Verteilung	230
5.3.4	Multinomialverteilung (Polynomialverteilung)	230
5.3.5	Poisson-Verteilung	233
5.3.5.1	Der Dispersionsindex	239
5.3.5.2	Approximation der Poissonverteilung durch die Standardnormalverteilung	241
5.3.6	Negative Binomialverteilung	241
5.3.7	Geometrische Verteilung	245
5.3.8	Hypergeometrische Verteilung	246
5.3.8.1	Approximationen der Hypergeometrischen Verteilung	250
5.3.9	Negative Hypergeometrische Verteilung	251
5.4	Stetige Verteilungen	252
5.4.1	Gleichverteilung	252
5.4.2	Standard-Beta-Verteilung	253
5.4.3	Normalverteilung	258
5.4.3.1	Zentrale Schwankungsintervalle der Standardnormalverteilung	264
5.4.3.2	Hinweise und Beispiele zur Normalverteilung	265
5.4.3.3	Zentraler Grenzwertsatz	271
5.4.4	Lognormalverteilung	272
5.4.4.1	Schätzung der Maßzahlen einer Lognormalverteilung	275
5.4.4.2	Empirische Maßzahlen einer Lognormalverteilung	276
5.4.5	Exponentialverteilung	278
5.4.6	Weibull-Verteilung	280
5.4.7	Gamma-Verteilung	282
5.5	Testverteilungen	285
5.5.1	Student-Verteilung	286
5.5.1.1	Nichtzentrale t-Verteilung	289
5.5.2	Chiquadrat-Verteilung	290
5.5.2.1	Nichtzentrale Chiquadrat-Verteilung	293
5.5.3	Fisher-Verteilung	295
5.5.4	Interpolation von Tabellenwerten	298
5.5.4.1	Interpolieren von Zwischenwerten der F-Verteilung	301
5.6	Verteilung zweidimensionaler Zufallsvariablen	303
5.6.1	Modellbildung	303
5.6.1.1	Einführendes Beispiel	303
5.6.1.2	Verteilungsfunktion	303
5.6.2	Randverteilungen und Unabhängigkeit	305
5.6.2.1	Bedingte Verteilung und Unabhängigkeit	307
5.6.2.2	Satz von Bayes für Zufallsvariablen	308
5.6.3	Korrelationskoeffizient	309
5.6.4	Zweidimensionale Normalverteilung	310

<b>6</b>	<b>Schätzen</b>	312
6.1	Stichproben-Erhebung	312
6.2	Zufallsstichproben und Zufallszahlen	313
6.2.1	Spezielle Stichprobenverfahren	318
6.3	Das Schätzen von Parametern	321
6.3.1	Vorbemerkungen	321
6.3.1.1	Der Schluss von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit	321
6.3.1.2	Punktschätzung und Intervallschätzung	322
6.3.1.3	Schätzwert und Schätzfunktion	322
6.3.2	Wünschenswerte Eigenschaften von Schätzfunktionen	323
6.3.2.1	Schätzfunktion für die Varianz	324
6.3.3	Gesetz der großen Zahlen	324
6.3.4	Der mittlere quadratische Fehler	325
6.4	Schätzverfahren für Maßzahlen einer Verteilung	326
6.4.1	Momentenmethode	326
6.4.2	Schätzung nach der größten Erwartung (MLE)	327
6.4.2.1	ML-Schätzer zur Binomialverteilung	329
6.4.2.2	ML-Schätzer zur Negativen Binomialverteilung	330
6.4.2.3	ML-Schätzer zur Poisson-Verteilung	332
6.4.2.4	ML-Schätzer zur Normalverteilung	332
6.4.3	Schätzung nach dem kleinsten Fehler (OLS)	333
6.5	Intervallschätzung - Konfidenzintervalle	334
6.6	Konfidenzintervall für den Anteilswert aus einer dichotomen Grundgesamtheit	337
6.6.1	Approximation durch die Normalverteilung	341
6.6.2	Nullergebnisse bzw. Vollergebnisse	343
6.6.3	Schnellschätzung der Vertrauensgrenzen anhand einer beobachteten relativen Häufigkeit nach Clopper und Pearson	345
6.6.4	Konfidenzintervall für die Differenz zweier Anteile	346
6.6.5	Konfidenzintervall für das Verhältnis zweier Anteile	347
6.6.6	Mindestumfang einer Stichprobe zur Schätzung eines Anteils	349
6.7	Konfidenzintervalle für den Erwartungswert einer Poisson-Verteilung	352
6.7.1	Zentrale („exakte“) Konfidenzintervalle	352
6.7.2	Nicht-zentrale (kürzeste) Konfidenzintervalle nach Crow und Gardner	355
6.7.3	Konfidenzintervall für das Verhältnis zweier Raten (Poisson-Verteilung)	355
6.7.4	Konfidenzintervalle für standardisierte Raten	357
6.8	Konfidenzintervalle für den Erwartungswert einer Normalverteilung	360
6.8.1	Vertrauenswahrscheinlichkeit und Irrtumswahrscheinlichkeit	360
6.8.2	Konfidenzintervall für den Erwartungswert	361
6.8.3	Konfidenzintervall für die Differenz zweier Erwartungswerte	364
6.8.4	Konfidenzintervall für den Erwartungswert aus Paardifferenzen	366
6.8.5	Konfidenzintervall für das Verhältnis zweier Erwartungswerte	367
6.8.6	Konfidenzintervall für Verhältniszahlen	367
6.8.7	Konfidenzintervall für den Erwartungswert einer Lognormalverteilung	368
6.9	Konfidenzintervall für die mittlere absolute Abweichung	369
6.10	Konfidenzintervall für den Median	370
6.10.1	Konfidenzintervall für die Differenz und den Quotienten von Medianen	374
6.10.2	Verteilungsunabhängige Konfidenzintervalle für beliebige Quantile	376
6.11	Konfidenzintervalle nach dem Bootstrap-Verfahren	377
6.12	Konfidenzintervalle für die Varianz einer Normalverteilung	380
6.12.1	Konfidenzintervall für den Quotienten zweier Varianzen	383
6.13	Weibull-Verteilung	384

6.13.1	Bestimmung der Parameter	384
6.13.2	Konfidenzintervall für die Weibull-Gerade	385
6.14	Konfidenzintervalle für die Parameter einer linearen Regression	386
6.14.1	Die Schätzung einiger Standardabweichungen	386
6.14.2	Konfidenzintervalle für den Regressionskoeffizienten, für den Achsenabschnitt und für die Restvarianz	390
6.14.3	Konfidenzintervalle und Prädiktionsintervalle für die Regressionsgerade	391
6.14.4	Inverse Prädiktion aus einer linearen Regression	396
6.15	Konfidenzintervall für den Korrelationskoeffizienten	396
6.16	Übereinstimmung und Präzision von Messwerten	399
6.16.1	Übereinstimmung von Messwertreihen nach Bland-Altman	399
6.16.2	Vergleich der Präzision und Genauigkeit zweier Messwertreihen	401
6.16.3	Der Konkordanz-Korrelationskoeffizient	402
6.16.4	Intraklassen-Korrelation: Interrater-Reliabilität	404
6.17	Toleranzgrenzen	407
6.17.1	Verteilungsunabhängige Toleranzgrenzen	409
6.18	Voraussageintervalle (Prädiktionsintervalle)	410
6.18.1	Voraussageintervalle für den Mittelwert von $m$ künftigen Beobachtungen	410
6.18.2	Voraussageintervalle für alle künftigen Beobachtungen	412
6.18.3	Voraussageintervalle für die Standardabweichung von $m$ künftigen Beobachtungen	414
6.19	Bayes-Schätzung	414
6.19.1	A-priori Verteilungen (Prior)	418
6.19.2	Parameterschätzung nach Bayes	420
<b>7</b>	<b>Hypothesentest</b>	<b>424</b>
7.1	Der statistische Test	424
7.1.1	Entscheidungsprinzipien	425
7.1.2	Statistische Hypothesen und Testentscheidungen	426
7.1.3	Die Formulierung von Hypothesen	429
7.1.3.1	Alternativhypothese als Gegensatz zur Nullhypothese	429
7.1.3.2	Durch Daten angeregte Hypothesen	430
7.1.4	Der $P$ -Wert nach R.A. Fisher	430
7.1.5	Wie oft wird eine wahre Nullhypothese abgelehnt?	433
7.1.6	Statistischer Test - Schritt für Schritt	434
7.1.6.1	Der Likelihood-Quotient; das Neyman-Pearson Lemma	436
7.1.7	Powerfunktion und Operationscharakteristik	438
7.1.8	Die Operationscharakteristik	443
7.1.8.1	Die OC-Kurve in der Qualitätskontrolle	443
7.1.9	Äquivalenztests	445
7.1.10	Verteilungsunabhängige Verfahren	446
7.2	Tests der Verteilung (Anpassungstests, goodness of fit)	449
7.2.1	Der Quotient $R/s$	449
7.2.2	Überprüfung des 3. und 4. Momentes	451
7.2.3	Der Quantile-Quantile Plot	454
7.2.4	Box-Cox-Transformation	456
7.2.5	Der Chiquadrat-Anpassungstest	457
7.2.6	Kolmogoroff-Smirnoff-Anpassungstest	461
7.2.6.1	Anpassung an eine Poisson-Verteilung	464
7.2.7	Shapiro-Wilk Test	466
7.2.8	Anderson-Darling Test	466
7.2.9	Ausreißerproblem	467

	7.2.9.1	Grubbs-Test für Ausreißer	469
	7.2.9.2	Q-Test nach Dixon	470
	7.2.9.3	Standardisierte Extremabweichungen	470
7.3		Einstichprobenverfahren	471
	7.3.1	Hypothesen zu Wahrscheinlichkeiten	472
	7.3.1.1	Binomialtest	472
	7.3.1.2	Binomialtest - Approximation durch die Normalverteilung	474
	7.3.1.3	Binomialtest - Fallzahlabstschätzung	475
	7.3.1.4	Binomialtest: Likelihood-Quotienten-Test	477
	7.3.2	Hypothesen zu Erwartungswerten, die sich auf einen empirischen Mittelwert beziehen	478
	7.3.2.1	Einstichproben- <i>t</i> -Test	478
	7.3.2.2	Fallzahlabstschätzung zum Einstichproben- <i>t</i> -Test	481
	7.3.2.3	Einstichprobentest auf Äquivalenz	483
	7.3.3	Einstichproben-Median-Test	484
	7.3.4	Vergleich einer empirischen Varianz mit ihrem Parameter	486
	7.3.5	Asymptotischer Test für den Variationskoeffizienten	486
	7.3.6	Prüfung der Zufallsmäßigkeit einer Folge von Alternativdaten oder von Messwerten	488
	7.3.6.1	Die sukzessive Differenzenstreuung	488
	7.3.6.2	Der Iterationstest für die Prüfung, ob eine Folge von Alternativdaten oder von Messwerten zufallsgemäß ist	488
	7.3.6.3	Phasenhäufigkeitstest von Wallis und Moore	492
	7.3.6.4	Der Vorzeichen-Trendtest von Cox und Stuart	492
	7.3.6.5	Variabilität der zentralen Tendenz	493
	7.3.7	Prüfung der Erwartungswerte von Poisson-Verteilungen	494
7.4		Zweistichprobenverfahren	497
	7.4.1	Vergleich zweier Varianzen (F-Test)	497
	7.4.1.1	Varianzvergleich bei kleinem bis mittlerem Stichprobenumfang	497
	7.4.1.2	Varianzvergleich bei mittlerem bis großem Stichprobenumfang	499
	7.4.1.3	Varianzvergleich bei großem bis sehr großem Stichprobenumfang	500
	7.4.1.4	Minimale Stichprobenumfänge für den F-Test	500
	7.4.1.5	Vergleich der Streuung zweier kleiner Stichproben nach Pillai und Buenaventura	501
	7.4.2	Rangdispersionstest von Siegel und Tukey	501
	7.4.3	Ansari-Bradley-Test	505
	7.4.4	<i>t</i> -Test für unabhängige Stichproben	508
	7.4.4.1	Unbekannte aber gleiche Varianzen	508
	7.4.4.2	<i>t</i> -Test bei unbekanntem Varianzen, die möglicherweise ungleich sind	513
	7.4.4.3	Fallzahlabstschätzung für den <i>t</i> -Test für zwei unabhängige Stichproben	516
	7.4.4.4	Bootstrap: <i>t</i> -Test Variante	519
	7.4.4.5	Multivariater <i>t</i> -Test nach Hotelling	521
	7.4.5	<i>t</i> -Test für Paardifferenzen	523
	7.4.5.1	Gepaarte Beobachtungen	523
	7.4.5.2	Absolute oder prozentuale Veränderungen	524
	7.4.5.3	<i>t</i> -Test für paarweise angeordnete Messwerte	525
	7.4.5.4	Prüfung der Gleichheit zweier Varianzen paariger Stichproben	527
	7.4.6	Wilcoxon-Rangsummentest für zwei unabhängige Stichproben ( <i>U</i> -Test)	527
	7.4.6.1	Der <i>U</i> -Test bei Rangaufteilung	535

7.4.6.2	Effektstärke im Vergleich unabhängiger Stichproben	537
7.4.6.3	Fallzahlabschätzung für den $U$ -Test	541
7.4.7	Wilcoxon-Paardifferenzentest	542
7.4.7.1	Konfidenzintervall für den Median der Paardifferenzen	545
7.4.7.2	Der Maximum-Test für Paardifferenzen	546
7.4.7.3	Der Vorzeichentest von Dixon und Mood	547
7.4.7.4	Stichprobenumfang für den Vorzeichentest / Wilcoxon-Test für Paardifferenzen	548
7.4.8	Vergleich zweier unabhängiger Stichproben nach Kolmogoroff und Smirnow	550
7.4.9	Cramér-von Mises Test	552
7.4.10	Einige weitere verteilungsunabhängige Verfahren für den Vergleich unabhängiger Stichproben	554
7.4.10.1	Der Zwei-Stichproben Dispersionstest: Count Five	554
7.4.10.2	Rosenbaumsche Schnelltests	555
7.4.10.3	Permutationstest, Randomisierungstest	556
7.4.10.4	Der Vergleich zweier unabhängiger Stichproben: Schnelltest nach Tukey	560
7.4.10.5	Der Median-Test	561
7.4.11	Zweistichprobentest auf Äquivalenz	562
7.4.11.1	Test auf Bioäquivalenz	564
7.5	Mehrfacher Hypothesentest	566
7.5.1	Multiples Testproblem	566
7.5.2	Adjustierung von P-Werten	568
7.5.3	Kombination von $P$ -Werten aus gleichgerichteten einseitigen Tests	573
7.6	Mehrstichprobenverfahren, varianzanalytische Methoden	575
7.6.1	Prüfung der Gleichheit mehrerer Varianzen	576
7.6.1.1	Prüfung der Gleichheit mehrerer Varianzen nach Hartley	577
7.6.1.2	Prüfung der Gleichheit mehrerer Varianzen nach Cochran	577
7.6.1.3	Prüfung der Gleichheit mehrerer Varianzen nach Bartlett	578
7.6.1.4	Robuster Test auf Varianzhomogenität nach Levene in der Brown-Forsythe-Version	580
7.6.2	Einfache Varianzanalyse (ANOVA, analysis of variance)	581
7.6.2.1	Permutationstest zur Varianzanalyse	585
7.6.2.2	Stichprobenumfang und Power für den varianzanalytischen Mittelwertvergleich	586
7.6.3	Multiple paarweise Vergleiche und weitere Mittelwertvergleiche	588
7.6.3.1	Multiple Vergleiche nach Tukey-Kramer	588
7.6.3.2	Multiple Vergleiche nach Games-Howell	591
7.6.3.3	Multiple Vergleiche mit einer Kontrolle nach Dunnett	593
7.6.3.4	Multiple Vergleiche: Auswahl des „Besten“ nach Hsu	595
7.6.3.5	Bereichsschätzung für den maximalen Erwartungswert	597
7.6.3.6	Multipler Vergleich von Mittelwerten mit dem Gesamtmittel: Maximum-Modulus-Ansatz	598
7.6.3.7	Beurteilung linearer Kontraste nach Scheffé	600
7.6.3.8	Bildung homogener Gruppen von Mittelwerten anhand des nach Hayter modifizierten LSD-Tests	603
7.6.4	H-Test von Kruskal und Wallis	604
7.6.4.1	Multiple paarweise Vergleiche mittlerer Ränge	608
7.6.4.2	$H$ -Test mit Stichproben-Untergruppen	611

7.6.4.3	H-Test-Variante: Vergleich eines Standards mit mehreren Behandlungen	612
7.6.4.4	Trendtest nach Jonckheere: Vergleich mehrerer geordneter Verteilungsfunktionen, zugleich ein Trendtest für Mediane	614
7.6.5	Varianzanalyse für Messwiederholungen (Blockvarianzanalyse)	617
7.6.6	Friedman-Test	618
7.6.6.1	Multiple paarweise Vergleiche nach Wilcoxon und Wilcox	623
7.6.6.2	Page-Test für geordnete Alternativen, die auf Friedman-Rangsummen basieren	626
7.6.7	Zweifache Varianzanalyse	628
7.6.8	Analyse von wiederholten Messungen	633
7.6.8.1	Typisierung wiederholter Messungen	633
7.6.8.2	ANOVA für wiederholte Messungen (gemischte Modelle)	636
7.6.9	Prinzipien der Versuchsplanung	637
7.7	Die Analyse von Häufigkeiten	645
7.7.1	Vergleich zweier relativer Häufigkeiten	645
7.7.2	Analyse von Vierfeldertafeln	647
7.7.2.1	Fallzahl und Power zum Vierfeldertest	652
7.7.2.2	Minimales $n$ für den Vierfeldertest	654
7.7.2.3	Vorsicht vor Trugschlüssen beim Vierfeldertest	655
7.7.3	Spezielle Risiko- und Effektmaße	656
7.7.3.1	Odds Ratio und relatives Risiko	656
7.7.3.2	Konfidenzintervalle für das Relative Risiko und für die Odds Ratio	660
7.7.3.3	Stichprobenumfänge für die Schätzung von Odds Ratio und Relativem Risiko	661
7.7.3.4	Der expositionsbedingte Anteil Erkrankter: Population Attributable Risk	666
7.7.3.5	Number Needed to Treat (NNT)	667
7.7.4	Exakter Test nach R.A. Fisher	669
7.7.5	Äquivalenz zweier Binomialwahrscheinlichkeiten	671
7.7.6	Der von McNemar modifizierte Vorzeichenstest	674
7.7.7	Test nach Mantel-Haenszel	679
7.7.7.1	Breslow-Day-Test	681
7.7.7.2	Die Kombination von Vierfeldertafeln	684
7.7.8	Der $k \times 2$ -Felder-Test nach Brandt und Snedecor	686
7.7.8.1	Zerlegung der Freiheitsgrade einer $k \times 2$ -Feldertafel	689
7.7.8.2	Multipler Vergleich von Anteilen (Marascuilo-Prozedur)	692
7.7.8.3	Homogenitätstest nach Ryan (Lückentest)	694
7.7.8.4	Power- und Fallzahlschätzung zum $k \times 2$ -Felder-Test	695
7.7.9	Cochran-Armitage Test auf linearen Trend	696
7.7.10	Vergleich mehrerer Anteile mit einem vorgegebenen Anteilswert (Standard)	700
7.7.11	Die Analyse von Kontingenztafeln des Typs $r \times c$	701
7.7.11.1	Kontingenzkoeffizient - Stärke des Zusammenhangs	711
7.7.11.2	Lokalisation der stochastischen Abhängigkeit nach Hommel	713
7.7.11.3	Simultane Paarvergleiche nach Royen	714
7.7.11.4	Prüfung auf Trend: Der Anteil der linearen Regression an der Gesamtvariation	717
7.7.12	Bowker-Test auf Symmetrie in quadratischen Mehrfeldertafeln	721
7.7.13	Marginalhomogenitätstest nach Lehmann	722
7.7.14	Q-Test nach Cochran	724

7.7.14.1	Simultane Konfidenzintervalle für paarweise Differenzen von Erfolgsanteilen .....	725
7.7.15	Cohen's Kappa-Koeffizient .....	727
7.7.15.1	Das gewichtete Kappa .....	730
7.7.15.2	Das Kappa für mehrfache Beurteilungen (Multi-Rater) .....	731
7.7.16	Kendalls Konkordanzkoeffizient $W$ .....	734
7.8	Hypothesentests zur Korrelation und Regression .....	735
7.8.1	Prüfung des Vorhandenseins einer Korrelation (Pearson) .....	736
7.8.1.1	$z$ -Transformation nach R.A. Fisher .....	740
7.8.1.2	Anwendungen der $z$ -Transformation .....	741
7.8.1.3	Fallzahl und Power zum Korrelationskoeffizienten .....	743
7.8.1.4	Der Vergleich mehrerer Korrelationskoeffizienten .....	744
7.8.2	Prüfung des Rang-Korrelationskoeffizienten nach Spearman (Rho-S) .....	745
7.8.3	Prüfung des Rang-Korrelationskoeffizienten nach Kendall (Tau) .....	747
7.8.4	Hypothesentests zu den Parametern einer Regression .....	748
7.8.4.1	Prüfung der Linearität einer Regression .....	749
7.8.4.2	Chow-Test: „Strukturbruch“ in einer linearen Regression .....	750
7.8.4.3	Durbin-Watson-Test: Autokorrelation in den Residuen .....	751
7.8.4.4	Prüfung des Regressionskoeffizienten gegen Null .....	754
7.8.4.5	Prüfung der Differenz zwischen einem geschätzten und einem hypothetischen Regressionskoeffizienten. ....	754
7.8.4.6	Prüfung der Differenz zwischen einem geschätzten und einem hypothetischen Achsenabschnitt. ....	755
7.8.4.7	Vergleich zweier Regressionskoeffizienten .....	755
7.8.4.8	Vergleich zweier Achsenabschnitte .....	757
<b>8</b>	<b>Statistische Modellbildung</b> .....	<b>758</b>
8.1	Einführung .....	758
8.2	Lineare Regressionsmodelle .....	762
8.2.1	Die einfache lineare Regression .....	762
8.2.2	Multiple lineare Regression .....	766
8.2.3	Überwindung von Multikollinearität in Regressionsmodellen. ....	771
8.2.4	Analyse der Residuen im linearen Modell .....	772
8.2.5	Heteroskedastizität im linearen Modell .....	775
8.2.6	Hypothesentest und Konfidenzintervalle zum linearen Modell .....	777
8.2.7	Verfahren der Variablenauswahl .....	778
8.2.8	Nominalskalierte Einflussgrößen .....	782
8.3	Varianzanalyse im linearen Modell .....	782
8.3.1	Einfaktorielle Varianzanalyse .....	782
8.3.1.1	Erwartungswert-Parametrisierung .....	783
8.3.1.2	Effekt-Parametrisierung: Dummy-Codierung .....	784
8.3.1.3	Effekt-Parametrisierung: Effekt-Codierung .....	785
8.3.1.4	Varianzkomponenten - ANOVA .....	786
8.3.2	Zweifaktorielle Varianzanalyse .....	787
8.4	Logistische Regression .....	791
8.4.1	Hypothesentest im logistischen Regressionsmodell .....	795
8.4.2	Multiple logistische Regression .....	796
8.4.3	Interpretation der Regressionskoeffizienten. ....	800
8.4.4	Variablenauswahl im Rahmen der Modellbildung .....	801
8.4.5	Residuenanalyse .....	802
8.4.6	Pseudo-Bestimmtheitsmaße .....	804
8.5	Poisson-Regression und loglineare Modelle .....	804

8.5.1	Poisson-Regression	805
8.5.1.1	Dispersionsindex und Poisson-Regression	808
8.5.2	Analyse von Kontingenztafeln	808
8.5.3	Loglineares Modell am Beispiel von 2 Faktoren	811
8.5.4	Dreidimensionale Kontingenztafeln	813
8.5.4.1	Modellbildung unter verschiedenen Restriktionen	813
8.5.4.2	Modellauswahl im loglinearen Ansatz	815
8.5.4.3	Fünf Einschränkungen und Hinweise zum loglinearen Modell	818
8.6	Modelle zu wiederholten Messungen	819
8.6.1	Varianzanalyse für wiederholte Messungen	819
8.6.2	Lineare gemischte Modelle	823
8.6.3	Analyse von Cluster-Daten	830
8.6.4	Verallgemeinerte Schätzgleichungen	835
8.7	Analyse von Überlebenszeiten	839
8.7.1	Kaplan-Meier Schätzung der Überlebensfunktion	842
8.7.2	Der Logrank-Test	847
8.7.3	Parametrische Modelle für Überlebenszeiten	850
8.7.4	Das Cox-Regressionsmodell	852
8.7.4.1	Regressionsmodelle zu Überlebenszeiten	852
8.7.4.2	Das Proportional-Hazards Modell von Cox	853
8.7.4.3	Parameter-Schätzung zum Cox-Modell	854
8.7.4.4	Interpretation der Parameter	856
8.7.4.5	Modellbildung; zur Auswahl geeigneter Einflussgrößen	859
8.7.4.6	Güte der Modellanpassung, Residuenanalyse	860
<b>9</b>	<b>Einführung in R</b>	<b>864</b>
9.1	Das Konsolfenster	864
9.2	Hilfestellung in R	868
9.3	Objekte in R	869
9.3.1	Vektoren	869
9.3.2	Erzeugen von Vektoren und Dateneingabe	871
9.3.3	Faktoren in R, Klassenbildung	872
9.3.4	Erzeugen von Matrizen	872
9.3.5	Rechnen mit Matrizen in R am Beispiel der Herleitung einer Kovarianzmatrix	873
9.3.6	Tabellen: Daten in Rahmen (data.frame)	874
9.4	Fehlende Angaben	876
9.5	Auswahl und Sortierung von Daten	877
9.6	Ablaufsteuerung: logische Bedingungen und Funktionen in R	879
9.7	Einige mathematische und statistische Funktionen	882
9.8	Modellbildung in R	886
9.9	Einfache graphische Funktionen und Hilfsmittel	887
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>893</b>
	<b>Namensverzeichnis</b>	<b>921</b>
	<b>Verzeichnis Anwendung der R-Funktionen</b>	<b>929</b>
	<b>Sachverzeichnis</b>	<b>933</b>

# Verzeichnis der Übersichten

1	Zur Planung wissenschaftlicher Studien: Erfahrungsbedingte Hypothesen und theoriegeleitete Erfahrungen ergänzen sich .....	5
2	Grundsätzliches zur Vermeidung von Fehlern .....	12
3	Strategien zur Vermeidung systematischer Fehler .....	13
4	Hinweise zur Beurteilenden Statistik .....	17
5	Zur Charakterisierung von Skalentypen .....	25
6	Verbindungen der vier Grundrechenarten .....	34
7	„Altväterliches“ Rezept für jede Rechnung von Hand .....	41
8	Maßzahlen der deskriptiven Statistik für die vier Skalentypen .....	66
9	Methoden zur deskriptiven Statistik und explorativen Datenanalyse.....	67
10	Fünf Jahreszahlen zur Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik ..	150
11	Diagnostischer Test: Prävalenz, Sensitivität und Spezifität.....	181
12	Diagnostischer Test: Voraussagewerte und Resultatvalidität .....	182
13	Zufallsvariable: die Verteilungsfunktion.....	201
14	Zufallsvariable: Rechenregeln für Erwartungswerte .....	204
15	Zufallsvariable: Rechenregeln für Varianzen .....	206
16	Wahrscheinlichkeiten zentraler Anteile für beliebige Verteilungen .....	208
17	Modell der Binomialverteilung für $n = 3$ Wiederholungen .....	221
18	Übergang der Binomialwahrscheinlichkeit in die Poissonverteilung .....	235
19	Zusammenhang zwischen den Verteilungen zu vier Urnenmodellen.....	247
20	Drei Konvergenzarten mit Beispielen .....	272
21	Beziehungen zwischen 20 ausgewählten Verteilungen .....	299

22	Verallgemeinerung im Gegensatz zur Datenbeschreibung .....	314
23	Zufallszahlen und die Prüfung auf Zufälligkeit .....	314
24	Größenordnung von Zufallsstichproben .....	317
25	Geeignete Schlussziffernkombinationen für gewählte Auswahlansätze .....	320
26	Schätzen von Parametern .....	321
27	Konfidenzintervall-Länge für einen Erwartungswert in Abhängigkeit von der Irrtumswahrscheinlichkeit .....	360
28	Unterschiede zwischen der Bayes-Statistik und einem frequentistischen Ansatz ...	414
29	Bayes-Statistik: Details zu häufig verwendeten konjugierten Verteilungen .....	418
30	Bayes-Statistik: Erwartungswert und Modalwert aus konjugierten Verteilungen ...	420
31	Fehlentscheidungen ( $\alpha$ , $\beta$ ) im Hypothesentest .....	427
32	Details zur Nullhypothese des Hypothesentests .....	428
33	Die empirische Irrtumswahrscheinlichkeit und die dreistufige Sternsymbolik .....	431
34	Hypothesentest: Wahrscheinlichkeiten zu falschen oder zu richtigen Ergebnissen ..	435
35	Bedeutung der Power für den Hypothesentest .....	440
36	Die Prüfung parametrischer und nichtparametrischer Hypothesen .....	446
37	Einstichproben-Verfahren: Entscheidungsdiagramm .....	472
38	Binomialtest: 3 Hypothesenpaare mit kritischen 5Schranken .....	474
39	Einstichproben- $t$ -test: 3 Hypothesenpaare mit Entscheidungsverfahren .....	479
40	Zweistichproben: Entscheidungsdiagramm für Vergleiche .....	508
41	Zweistichproben- $t$ -Test: Entscheidungshilfe .....	514
42	Zweistichproben-Verfahren: weiterführende Details .....	515
43	Zweistichproben im Verbund: Entscheidungsdiagramm für Vergleiche .....	525
44	Permutationstest in 5 Schritten .....	558
45	Mehrstichproben-Verfahren: Entscheidungsdiagramm .....	575
46	Mehrstichproben im Verbund: Entscheidungsdiagramm .....	616
47	Messwiederholungen: Details für Bewertungen und Vergleiche .....	634
48	Versuchsanordnungen zur Prüfung von Unterschieden zwischen Faktorstufen .....	641
49	Zusammenhänge: Entscheidungsdiagramm .....	735
50	Drei Korrelationskoeffizienten im Vergleich .....	736
51	Entscheidungsdiagramm zur Modellbildung .....	758

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Kreisprozesse	4
1.2	Induktion und Deduktion	10
1.3	Variablen nach der Problemstellung	21
1.4	Variablen nach der Skalierung	22
1.5	Visuelle Analogskala	23
1.6	Beobachtungssituationen und Datenstruktur	26
1.7	Datentabelle in $\mathbf{R}$	27
2.1	Venn-Diagramm zur Teilmengenrelation	30
2.2	Venn-Diagramm zur Vereinigungsmenge	30
2.3	Venn-Diagramm zur Schnittmenge	31
2.4	Venn-Diagramm zum Komplement einer Menge	31
2.5	Venn-Diagramm zur Differenz zweier Mengen	31
2.6	Lineare Funktionen	52
2.7	Quadratische Funktionen	53
2.8	Periodische Funktionen	54
2.9	Exponentialfunktionen	55
2.10	Wachstumsfunktionen	56
2.11	Fläche unter der Kurve	57
2.12	Pascalsches Dreieck	64
3.1	Balken- und Kreisdiagramm (Blutgruppen im AB0-System)	72
3.2	Rechteckdiagramm und Mosaikplot (Blutgruppen im AB0-System)	74
3.3	Box-Plot (Schema)	81
3.4	Dot-Plot und Box-Plot (Schmerzintensität)	82
3.5	Inversionen in gepaarten Rangfolgen	83
3.6	Fehlerbalken (Mittelwert und Standardabweichung)	92
3.7	Systematische und zufällige Fehler (Schießscheibenmodell)	102
3.8	Histogramm (Body-Mass-Index BMI)	111
3.9	Empirische Verteilungsfunktion (Body-Mass-Index)	112
3.10	Box-Plot und empirische Verteilungsfunktion (Body-Mass-Index)	113
3.11	Pareto-Diagramm (Fehler bei der Fertigung)	114
3.12	Lorenz-Kurve (Marktanteile)	117
3.13	Punktwolke (Alter und Körpergröße)	118
3.14	Streuung in bivariaten Messungen	119
3.15	Punktwolken zu unterschiedlichen Korrelationskoeffizienten	121
3.16	Autokorrelationsfunktion	122

3.17	Punktwolke und Residuen-Plot zu Lungentumoren / Asbestexposition	129
3.18	Korrelation und Regression (Zusammenhang)	130
3.19	Regression - Methode der orthogonal kleinsten Quadrate	134
3.20	Robuste lineare Regression zu Auslandstelefonaten / Jahrgang	136
3.21	Kurvenformen zu nichtlinearen Funktionen	137
3.22	Nichtlineare Regression	138
3.23	Regressionsmodell (asymptotisch)	139
3.24	Logistisches Regressionsmodell	140
3.25	Compartment-Modell (nichtlineare Regression)	140
3.26	Michaelis-Menten Gleichung (nichtlineare Regression)	141
3.27	Linearisierung von Punktwolken	143
3.28	Linearisierbare Funktionen	145
3.29	Regressogramm	147
3.30	Kubische Spline-Interpolation	149
4.1	Beziehungen zwischen Ereignissen (Venn-Diagramme)	152
4.2	Additionssatz für „vereinbare“ Ereignisse	158
4.3	Baumdiagramm zur Stochastischen Unabhängigkeit	167
4.4	Zerlegung der Ergebnismenge	176
4.5	Pfadregel und Bayessesches Theorem	177
4.6	Positiver und negativer Voraussagewert	183
4.7	Histogramm (Nüchternblutzucker und Diabetes)	185
4.8	ROC-Kurve (Nüchternblutzucker und Diabetes)	186
4.9	Fagan-Nomogramm zur Bestimmung der Posttest-Wahrscheinlichkeit	187
4.10	Entscheidungskurve für einen oralen Glukose-Toleranztest	190
5.1	Diskrete Zufallsvariablen (Modell)	196
5.2	Wahrscheinlichkeits- und Verteilungsfunktion (Werfen eines Würfels)	198
5.3	Wahrscheinlichkeits- und Verteilungsfunktion (Werfen zweier Würfel)	198
5.4	Verteilungs- und Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariablen	199
5.5	Formen einer Verteilung	210
5.6	Verteilung und Berechnung der Potenzmomente	214
5.7	Verteilung der Körpergröße	215
5.8	Diskrete Gleichverteilung	218
5.9	Bernoulli-Versuche	220
5.10	Binomialverteilung	222
5.11	Multinomialverteilung	232
5.12	Poisson-Verteilung	235
5.13	Poisson-Verteilung (Anzahl der Unverträglichkeiten)	238
5.14	Negative Binomialverteilung (Anzahl der Nieten)	242
5.15	Geometrische Verteilung (Würfelwurf)	246
5.16	Hypergeometrische Verteilung (Lotto)	249
5.17	Gleich- oder Rechteckverteilung	253
5.18	Standard-Beta-Verteilung	255
5.19	Standard-Beta-Verteilung (Gewinn-Anteile / Übertragbarkeit von Polio)	256
5.20	Binomial-Prozess, unterschiedliche Sichtweisen	257
5.21	Binomial-Prozess (Bauteile / Darlehen / Umfrage)	258
5.22	Exponentialfunktion (Glockenkurven)	258
5.23	Normalverteilung: Wahrscheinlichkeitsdichte	260
5.24	Standardnormalverteilung: Wahrscheinlichkeitsdichte und Verteilungsfunktion	261
5.25	Wahrscheinlichkeiten zum Nüchternblutzucker	263
5.26	Normalverteilung: Flächenanteile (Quantile)	264

5.27	Normalkurve: Länge eines Gegenstandes	268
5.28	Standardnormalverteilung: Fläche unter der Dichte	269
5.29	Normalverteilung: Anpassung aus Histogrammdata	270
5.30	Lognormalverteilung: Wahrscheinlichkeitsdichte und Verteilungsfunktion	273
5.31	Lognormalverteilung (Alter bei 1. Vaterschaft)	276
5.32	Exponentialverteilung	279
5.33	Weibull-Verteilung	280
5.34	Weibull-Verteilung: Reliabilität und Ausfallrate	281
5.35	Weibull-Verteilung (Bruchfestigkeit)	282
5.36	Gamma-Funktion	282
5.37	Gamma-Verteilung	284
5.38	Gamma-Verteilung (Haltbarkeit von Druckgefäßen)	285
5.39	Standardnormalverteilung und „Student“-Verteilung	286
5.40	$t$ -Verteilung	287
5.41	Nichtzentrale $t$ -Verteilung	290
5.42	$\chi^2$ -Verteilung	291
5.43	Nichtzentrale $\chi^2$ -Verteilung	294
5.44	$F$ -Verteilung	295
5.45	Lineare Interpolation	298
5.46	Zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsdichte: Teenager-Allüren	305
5.47	Bedingte Dichtefunktionen: Teenager-Allüren	308
5.48	Höhenlinien: Teenager-Allüren	310
5.49	Zweidimensionale Normalverteilung	311
5.50	Höhenlinien dreier zweidimensional-standardisierter Normalverteilungen	311
6.1	Stichprobenumfang: Allgemeine Faktoren	317
6.2	Likelihood- und Wahrscheinlichkeitsfunktion	328
6.3	OLS-Schätzer zur linearen Regression und zur nichtlinearen Regression	335
6.4	Konfidenzgrenzen zur Schätzung von $\pi$	336
6.5	Darstellung von Konfidenzintervallen in $\mathbf{R}$	337
6.6	95%-Konfidenzintervalle für $\pi$	345
6.7	Notched Box-Whisker-Plot (Ausfallzeiten: Energieversorgung)	374
6.8	Weibull-Diagramm (Scheuerfestigkeit von Garn)	385
6.9	Konfidenzintervall zur linearen Regression	393
6.10	Konfidenzintervall zur linearen Regression (Flügelspanweite von Sperlingen)	395
6.11	95%-Konfidenzintervalle für den Korrelationskoeffizient $\rho$	397
6.12	Fehlende Übereinstimmung und systematische Unterschiede	399
6.13	Übereinstimmung von Messungen nach Bland-Altman	400
6.14	Bayes-Schätzung: A-priori und a-posteriori Verteilung	417
6.15	Bayes-Schätzung: konjugierte Standard-Beta-Verteilung (a-priori)	419
6.16	Bayes-Schätzung: a-priori Beta-Verteilungen (faire Münze)	421
6.17	Bayes-Schätzung: $HPD$ -Region zur a-posteriori Verteilung	423
7.1	Kritischer Wert der Teststatistik	439
7.2	Teststärkekurven (Gütefunktionen)	441
7.3	OC-Kurve für einen Stichprobenplan	444
7.4	AOQ-Kurve für den mittleren Durchschlupf	445
7.5	QQ-Plot (Blutzucker und Cholesterin)	455
7.6	QQ-Plot: Abweichungen von einer Normalverteilung	455
7.7	Box-Cox-Transformation	456
7.8	Histogramm und Normalverteilung (Blutzucker und Cholesterin)	459
7.9	Empirische Verteilung und Normalverteilung (Blutzucker und Cholesterin)	462

7.10	Verteilungsmodell: Anzahl der Erfolge unter $n = 30$ Versuchen	473
7.11	Verteilungsfunktion unter $H_0$ (mittlerer diastolischer Blutdruck)	480
7.12	Power für den Einstichproben-t-Test	482
7.13	Wilcoxon-Verteilung: Dichte- und Verteilungsfunktion	532
7.14	Effektmaße: Cohen's $d$ und die Wahrscheinlichkeit $P(X > Y)$	538
7.15	AUC (ROC-Kurve) und Stärke eines Effektes	540
7.16	Differenz zwischen empirischen kumulierten Häufigkeitsverteilungen	552
7.17	Äquivalenztest: Annahmebereiche und Ablehnungsbereich	564
7.18	Falsch positive Resultate bei mehrfachem Test	566
7.19	Fehler bei einem einzigen Test gegenüber mehrfachen unabhängigen Tests	567
7.20	Parallelplot (Wirksamkeit verschiedener Diuretika)	626
7.21	Interaction-Plot (Geschlecht und Grad der Depression)	631
7.22	Zweifache Varianzanalyse mit Berücksichtigung einer Wechselwirkung	632
7.23	Formen von Verlaufsdaten	634
7.24	Wiederholte Messungen in zwei Gruppen (hypothetisches Beispiel)	636
7.25	Profildigramm zu Verlaufsdaten	638
7.26	Versuchsplanung für den Vergleich zweier Behandlungen	639
7.27	Powerkurve zum Vierfeldertest	653
7.28	Vierfeldertafel: Mosaikplot und die Odds Ratio	661
7.29	Äquivalenzintervall: Zweiseitiger Test für Binomialwahrscheinlichkeiten	672
7.30	Chow-Test (Strukturbruch bei linearer Regression)	751
7.31	Durbin-Watson-Test Entscheidungsgrenzen	752
7.32	Durbin-Watson-Test Beispiel	753
8.1	Lineares Regressionsmodell (Cholesterin in Abhängigkeit vom Alter)	763
8.2	Residuenanalyse (Cholesterin in Abhängigkeit vom Alter)	764
8.3	Multiple lineare Regression	767
8.4	Multiple lineare Regression (Mausmodell)	769
8.5	Residuen-Plot: systematische Fehler im Modell	773
8.6	Leverage-Plot: „extreme“ Einzelfälle im Modell	774
8.7	Heteroskedastizität im linearen Regressionsmodell	775
8.8	Simultane Konfidenzintervalle nach Tukey (Antibiotika)	787
8.9	Interaction-Plot (Antibiotika)	789
8.10	Logit-Transformation als Link-Funktion bei einer logistischen Regression	792
8.11	Logistische Funktion (Challenger-Unglück)	793
8.12	Multiple logistische Regression (Kyphose)	797
8.13	Residuenanalyse für das Modell der logistischen Regression (Kyphose)	803
8.14	Poisson-Regression (Paarungen afrikanischer Elefanten)	807
8.15	Mosaikplot zu Kontingenztafeln (Arbeitslosigkeit / Gebrauch von Drogen)	809
8.16	Hierarchisch geordnete Hypothesen zur Unabhängigkeit	816
8.17	Verlaufsdaten (hypothetisches Beispiel)	820
8.18	Verlaufsdaten in zwei Gruppen (hypothetisches Beispiel)	822
8.19	Lineare Regression zu Einzelverläufen (hypothetisches Beispiel)	824
8.20	Regressionsanalyse und gemischt lineares Modell	828
8.21	Synchronisation von Ereignissen und Ereigniszeiten	840
8.22	Sterbefunktion, Überlebensfunktion und Hazardfunktion	841
8.23	Kaplan-Meier: Schätzung der Überlebensfunktionen	845
8.24	Kaplan-Meier: Vergleich zweier Überlebensfunktionen	848
8.25	Überlebensfunktion, nach exponentiellem Modell geschätzt	851
8.26	Überlebens- und Risikofunktion nach einem Weibull-Modell geschätzt	852
8.27	Überlebensfunktion nach dem Cox-Modell geschätzt	858
8.28	Log-kumuliertes Risiko der Cox-Snell-Residuen	861

8.29	Martingal-Residuen aus dem Nullmodell .....	862
8.30	Schoenfeld-Residuen .....	863
9.1	<b>R</b> -Konsole .....	865
9.2	RStudio Editor zu <b>R</b> .....	867
9.3	R-commander ( <b>library(Rcmdr)</b> ) .....	867
9.4	Hilfestellung (HTML) in <b>R</b> .....	868
9.5	Datenrahmen ( <b>edit()</b> ) .....	875
9.6	Statistische Graphiken in <b>R</b> .....	888
9.7	Plotsymbole und Linienarten in den Graphikfunktionen .....	889
9.8	Parabelsegment mit Ergänzungen zu Graphik-Funktionen .....	890

# Tabellenverzeichnis

2.1	Relationen in der Mathematik	28
2.2	Logische Operatoren in der Mathematik	29
2.3	Konstanten in der Mathematik	40
2.4	Fehler aus Rundungen	41
2.5	Definitionen und Notationen zur Matrixalgebra	44
3.1	Blutgruppen des ABO-Systems (Beispiel)	68
3.2	Verhältniszahlen	70
3.3	Tabellenschema zur zweifachen Klassifikation	72
3.5	Partieller Rangkorrelationskoeffizient (Schema zur Berechnung)	85
3.6	Wachstumsfunktionen und Wachstumsraten	97
3.7	Fehlerfortpflanzung in Funktionen mit Mittelwerten	105
3.8	Häufigkeitsverteilung aus klassierten Messwerten	112
3.9	Pareto-Diagramm (Fehler bei der Fertigung)	115
3.10	Alter und Körpergröße (Beispiel)	118
3.11	Linearisierende Transformationen	144
4.1	Beziehungen zwischen Ereignissen	153
4.2	Benford's Law	162
4.3	Bedingte Wahrscheinlichkeiten (Vierfelder-Schema)	165
4.4	Sterbetafel-Daten (Absterbeordnung)	166
4.5	Wahrscheinlichkeiten für mindestens einen Treffer	173
4.6	Diagnostischer Test (Vierfelder-Schema)	180
4.7	Positiver und negativer Voraussagewert eines diagnostischen Tests	183
4.8	Wahrscheinlichkeit falsch negativer Befunde	184
5.1	Potenzmomente (Rechenschema)	213
5.2	Binomialwahrscheinlichkeiten	223
5.3	Binomialverteilung, Approximation durch die Standardnormalverteilung	229
5.4	Winkeltransformation	230
5.5	Poissonverteilung	236
5.6	Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung	262
5.7	Normal- und Lognormal-Verteilung	275
5.8	$t$ -Verteilung; Quantile (Signifikanzschranken)	288
5.9	$\chi^2$ -Verteilung; Quantile (Signifikanzschranken)	292
5.10	$F$ -Verteilung; 0,95-Quantile (obere 5%-Schranken)	296
5.11	$F$ -Verteilung; 0,975-Quantile (obere 2,5%-Schranken)	297

6.1	Zufallszahlen	315
6.2	95%-Konfidenzintervalle für $\pi$	338
6.3	Gruppengröße in Gruppentests	340
6.4	Gruppengröße in Gruppentests nach A.B. Mundel	341
6.5	Vertrauensgrenzen zum Null- bzw. Vollergebnis	343
6.6	Stichprobenumfang zur Schätzung eines Anteils (95%-KI fest)	350
6.7	Stichprobenumfang zur Schätzung eines Anteils (Variationskoeffizient fest)	351
6.8	Konfidenzintervalle für den Erwartungswert einer Poisson-Verteilung	354
6.9	Schranken für den Vorzeichentest	371
6.10	95%-Konfidenzintervall für $\sigma$ , Faktoren zur Berechnung	381
6.11	Konfidenzintervall für den relativen Fehler der Standardabweichung	382
6.12	Stichprobenumfänge zur Schätzung von $\sigma$ und $\mu$	383
6.13	Stichprobenumfänge zur Schätzung von $\sigma_1^2/\sigma_2^2$	383
6.14	Regressions- und Korrelationsrechnung (Schema)	389
6.15	Zweiseitige Schranken der Studentisierten Maximum Modulus Verteilung	392
6.16	Schema zur Berechnung von Prädiktionsintervallen	393
6.17	Toleranzfaktoren für die Normalverteilung	408
6.18	Stichprobenumfang $n$ für Toleranzbereiche	409
6.19	Stichprobenumfang für verteilungsunabhängige Toleranzgrenzen	409
6.20	Kleinsten Stichprobenumfang für zweiseitige Toleranzintervalle	410
6.21	Verteilungsunabhängige Toleranzgrenzen	411
6.22	Simultane zweiseitige Voraussageintervalle	413
7.1	Fälschliche Ablehnung der Nullhypothese	433
7.2	Signifikanzgrenzen zur Standardnormalverteilung	436
7.3	Asymptotische Effizienz nichtparametrischer Verfahren	448
7.4	Kritische Grenzen des Quotienten $R/s$	450
7.5	Quantile der standardisierten 3. und 4. Momente	452
7.6	Nüchternblutzucker und Cholesterin (Beispiel)	454
7.7	Empirische Verteilung und Normalverteilung	460
7.8	Kritische Werte $D$ für den Kolmogoroff-Smirnoff-Test	462
7.9	Kritische Werte $D$ für den Kolmogoroff-Smirnoff-Anpassungstest	463
7.10	Kritische Werte $D$ für den nach Lilliefors modifizierten Test	463
7.11	Kritische Werte $D$ für den Kolmogoroff-Smirnoff-Test (Poisson-Verteilung)	465
7.12	Kritische Werte für den Ausreißertest nach Dixon	470
7.13	Obere Signifikanzschranken der standardisierten Extremabweichung	471
7.14	Stichprobenumfänge zum Binomialtest	476
7.15	Stichprobenumfänge zur Sicherung eines Nullereignisses	477
7.16	5%-Schranken für den Vorzeichen-Rangtest	484
7.17	Kritische Schranken zur sukzessiven Differenzenstreuung	489
7.18	Kritische Werte für den Iterationstest	491
7.19	Obere 5%- und 1%-Schranken der Poisson-Verteilung	495
7.20	Kumulierte Poisson-Wahrscheinlichkeiten	495
7.21	Minimale Stichprobenumfänge für den F-Test	500
7.22	Obere Signifikanzschranken der auf den Spannweiten basierenden $F'$ -Verteilung	501
7.23	Kritische Werte für $R_1$ im Siegel-Tukey-Test	503
7.24	Stichprobenumfänge zum Zweistichproben- $t$ -Test	517
7.25	Kritische Werte von $U$ für den Test von Wilcoxon, Mann und Whitney	530
7.25	Fortsetzung zur Tabelle 7.25	531
7.26	Kritische Werte für den Wilcoxon-Paardifferenzen-Test	543
7.27	Wertepaare $(n; h)$ für den Vorzeichentest	547
7.28	Stichprobenumfänge $n$ für den Vorzeichentest	549

7.29	Stichprobenumfänge für den Wilcoxon-Paardifferenzentest	549
7.30	Werte $D_{n_1; n_2; \alpha}$ für den Kolmogoroff-Smirnoff Test	550
7.31	Ausgewählte Konstanten für den Kolmogoroff-Smirnoff Test	551
7.32	Obere asymptotische Schranken für den Cramér-von Mises Test	552
7.33	Testentscheidungen bei multiplen Nullhypothesen	568
7.34	Verteilung von $F_{\max}$ für die Prüfung mehrerer Varianzen auf Homogenität	576
7.35	Signifikanzschranken für den Test nach Cochran	578
7.36	Stichprobenumfänge für eine einfache Varianzanalyse	587
7.37	Obere Signifikanzschranken des Studentisierten Extrembereiches (SR-Verteilung)	589
7.38	Obere Schranken der Verteilung des „Studentized Augmented Range“ (SAR)	592
7.39	Obere Signifikanzschranken der Dunnett-Verteilung	596
7.40	Faktoren für die Auswahl eines besten Mittelwerts	598
7.41	Quantile der Studentisierten Maximum-Modulus-Verteilung (SMM)	599
7.42	Maximalzahl linearer Kontraste	603
7.43	Kritische Schranken für den $H$ -Test	605
7.44	Irrtumswahrscheinlichkeiten für den $H$ -Test	607
7.45	Ausgewählte Schranken nach Harter	610
7.46	5%- und 1%-Quantile für den Friedman-Test	619
7.47	Kritische Werte für den multiplen Vergleich mit einer Kontrolle	622
7.48	Kritische Differenzen für die Zweiwegklassifizierung	624
7.48	Fortsetzung von Tabelle 7.48	625
7.49	5% und 1%-Schranken für den Page-Test	627
7.50	Notation zur zweifachen Varianzanalyse mit balancierten Daten	629
7.51	Zweifache Varianzanalyse mit festen Effekten (Schema)	630
7.52	Erwartungswerte der gemittelten Summen aus der zweifachen Varianzanalyse	633
7.53	Teststatistiken verschiedene Modelle zur zweifachen Varianzanalyse	633
7.54	Randomisierte Blöcke	640
7.55	Schätzung der Parameter eines faktoriellen Versuchs	642
7.56	Signifikante Differenzen aus Prozentsätzen	646
7.57	Vergleich zweier Alternativmerkmale (Schema)	648
7.58	Vergleich zweier Therapieansätze (Beispiel)	648
7.59	Schranken für den Vierfelder-Test	650
7.60	$\chi^2$ -Tabelle für einen Freiheitsgrad	650
7.61	$\chi^2$ -Tabelle für einen Freiheitsgrad: ein- und zweiseitige Schranken	651
7.62	Minimale Stichprobenumfänge für den Zweistichproben-Fisher-Test	654
7.63	Vierfeldertafel für Kohorten-Studien (Schema)	657
7.64	Vierfeldertafel für Fall-Kontroll-Studien (Schema)	658
7.65	Berechnung von Risiko-Maßen (Beispiel)	658
7.66	Relatives Risiko: Bewertung hinsichtlich einer Exposition	659
7.67	Fallzahlen in Fall-Kontroll-Studien	664
7.68	Fallzahlen zur Bewertung des Relativen Risikos	665
7.69	Stichprobenumfänge zur Bestimmung expositionsbedingter Anteile Erkrankter	667
7.70	Berechnung des exakten Tests nach R.A. Fisher (Beispiel)	669
7.71	Exakter Test nach R.A. Fisher	670
7.72	Neugeborenen-Erythroblastose (Beispiel)	685
7.73	Homogenitätstest (Schema)	686
7.74	Zweifache Klassifikation in einer Kontingenztafel	702
7.75	Vergleich dreier Therapieformen (Beispiel)	705
7.76	Obere Schranken der Bonferroni-Statistik	711
7.77	Schranken für simultane Paarvergleiche nach Royen	715
7.78	10%-Schranken für simultane Paarvergleiche mit einer Kontrolle	716

7.78	Fortsetzung zu Tabelle 7.78	717
7.79	Punktwerte für die Prüfung auf Trend (Beispiel)	719
7.80	Q-Test nach Cochran	724
7.81	Übereinstimmung in mehrfachen Beurteilungen (Schema)	732
7.82	Prüfung des Korrelationskoeffizienten $\rho = 0$	738
7.83	Fisher-Transformation zum Korrelationskoeffizienten	740
7.84	Fisher-Transformation der Werte $z$ zum Korrelationskoeffizienten $r$	741
7.85	Stichprobenumfänge zur Schätzung des Korrelationskoeffizienten	743
7.86	Schranken für die Rangkorrelationskoeffizienten nach Spearman und Kendall	746
7.87	Schranken für den Durbin-Watson-Test	752
8.1	Analyse von Residuen anhand von Punktwolken	772
8.2	ANOVA-Tabelle zum linearen Modell mit einem Faktor	786
8.3	Varianzkomponenten zum linearen Modell mit zwei Faktoren	789
8.4	Erwartungswerte einer Zielgröße in einer zweifaktoriellen Varianzanalyse	790
8.5	Challenger-Unglück (Beispiel)	792
8.6	Wirbelsäulenverkrümmung (Beispiel)	798
8.7	Modell der logistischen Regression für eine einzelne dichotome Einflussgröße	800
8.8	Hypothesen zur Unabhängigkeit dreier Faktoren im loglinearen Modell	815
8.9	Güte der Anpassung unter verschiedenen loglinearen Modellen	817
8.10	Varianz-Inflationsfaktor	831
8.11	Vergleich der Überlebenszeiten zweier Tumorthapien (Beispiel)	843
8.12	Schätzung der Überlebensfunktion nach Kaplan-Meier (Beispiel)	844
8.13	Therapie des Ovarial-Karzinoms (Beispiel)	855
9.1	Zeichen in der Syntax von <b>R</b>	866
9.2	Datentypen in <b>R</b>	869
9.3	Objekttypen in <b>R</b>	869
9.4	Ablaufsteuerung und Funktionen in <b>R</b>	880
9.5	Mathematische Funktionen in <b>R</b>	883
9.6	Statistische Funktionen in <b>R</b>	884
9.7	Syntaxelemente zur Modellspezifikation	886
9.8	Unterstützung der Modellanpassung	887
9.9	Informationen aus einem Modell	887
9.10	Graphikfunktionen (high-level) in <b>R</b>	888
9.11	Graphikfunktionen (low-level) in <b>R</b>	889
9.12	Argumente in den Graphikfunktionen	891