

Detlef D. Spalt

Die Analysis im Wandel und im Widerstreit

Eine Formierungsgeschichte
ihrer Grundgeschichte

Verlag Karl Alber Freiburg / München

Inhalt

| | |
|--|-----|
| Vorwort | v |
| Inhalt | ix |
| Einleitung | xix |
| 1. Die Erfindung der formalen Algebra durch Descartes | 1 |
| Der Stand der Dinge vor Descartes: Galilei um die Jahre 1623–38 | 1 |
| Die geläufige Version | 1 |
| Die tatsächliche Version | 2 |
| Descartes' mathematische Großtat | 3 |
| Erster Versuch: Descartes' Algebra mit Figuren (bis 1628) | 4 |
| Das Ausgangsproblem | 4 |
| Die »Regulae«: Rechnen mit Figuren | 6 |
| Die Leistungsfähigkeit des menschlichen Denkens | 6 |
| Descartes' Vorgehensweise | 7 |
| Was sind Figuren, und wie soll mit ihnen verfahren werden? | 8 |
| Descartes' Zielsetzung | 11 |
| Zweiter Versuch: Descartes' Algebra mit Streckenlängen (ab 1637) – die Erfindung der formalen Algebra | 17 |
| Die grundlegenden Konstruktionen | 18 |
| Reflexion 1 | 19 |
| Die bahnbrechende Erfindung | 21 |
| Die Erfindung der rein formalen Gleichung | 25 |
| Reflexion 2 | 26 |
| Die Rückbindung der algebraisch gefundenen Gleichungslösung an die Geometrie | 28 |
| Descartes hat nur positive Grössen – und keine Koordinaten | 30 |
| Ergebnis | 31 |
| Ein Blick auf Descartes' Ontologie | 31 |
| Substanz, Attribut, Modus | 32 |
| Zwei Substanzen | 32 |
| Geometrie und Arithmetik bei Descartes | 34 |
| Bewegung in der Mathematik | 35 |
| Ein ontologischer Nachtrag | 38 |

| | |
|---|-----------|
| Historiografische Nachträge | 38 |
| Die Erfindung der Operationszeichen + und – | 38 |
| Das cossische Rechnen | 43 |
| Recordes oder: Die Erfindung des Gleichheitszeichens | 45 |
| Viète oder: Rechnen mit geometrischen Figuren – nicht formal | 46 |
| Eine weltgeschichtliche Analogie zu Descartes' Leistung | 48 |
| Die Anfänge von Descartes' Gleichungslehre | 52 |
| Warum „Algebra“? | 59 |
| Descartes' Leistung für die Grundlagen der Mathematik | 60 |
| Warum also „Algebra“? | 61 |
| Zur philosophischen Bedeutung von Descartes' Leistung für die Mathematik | 63 |
| | |
| 2. Die Erfindung der stetig Veränderlichen durch Leibniz | 65 |
| | |
| Die bei Descartes verbliebene Begriffslücke | 65 |
| Verschiedene Arten von Gleichungen | 65 |
| Worin besteht das Problem bei Descartes? | 67 |
| Descartes' Ablenkungsmanöver | 68 |
| Die Lösung des Descartes'schen Problems in der Analysis: | |
| eine Begriffsverschiebung | 70 |
| Der Gegenstand | 70 |
| Die Bedeutung dieser Lösung des Descartes'schen Problems | 70 |
| Eine Bewertung dieser Lösung | 70 |
| Wie kann Leibniz zum Begriff der veränderlichen Größe kommen? | 71 |
| Zu Leibniz' Begriff der Monade | 71 |
| Leibniz' Begriff der Veränderung | 73 |
| Leibniz' Begriff(e) von (Raum und) Zeit | 78 |
| Leibniz' Begriff der Zahl | 79 |
| Der junge Leibniz war Pythagoreer | 79 |
| Ontologisch gefragt: Was ist die Zahl? | 80 |
| Begrifflich gefragt: Wie ist „Zahl“ bestimmt? | 80 |
| Das Verfahren der Größen- und der Zahlbestimmung | 85 |
| Zur Deutungsgeschichte des Leibniz'schen Zahlbegriffs | 89 |
| Zwei Schlussbemerkungen zu Leibniz' Zahlbegriff | 99 |
| Das erste allgemeine Konvergenzkriterium | 101 |
| Die Quelle | 101 |
| Aus dem Inhalt | 102 |
| Das Konvergenzkriterium (ohne den Begriff der Konvergenz) | 102 |
| Leibniz' Technik der Infinitesimalrechnung: strenge Epsilontik – das Riemann-Integral | 105 |
| Die Konstruktion | 106 |
| Der Beweis | 108 |

| | |
|--|-----|
| Bedingungen an diesen Beweis | 109 |
| Das Neuartige an diesem Beweis | 110 |
| Der Preis des Neuartigen | 110 |
| Leibniz' Begründung der Differenzialrechnung | 111 |
| Die Quelle | 111 |
| Das Kontinuitätsgesetz | 111 |
| Unendlich kleine und unendlich große Größen – als „erdichtete“ | 113 |
| Die Differenzialregeln | 117 |
| Leibniz erweitert den Geltungsbereich der Mathematik | 122 |
| Der Ausgangspunkt: Descartes' <i>La Géométrie</i> | 122 |
| Leibniz' Erweiterungsprogramm | 123 |
| Durch die Einführung der veränderlichen Größe wird das Kontinuum zu einem Gegenstand der Mathematik | 124 |
| Transzendente Zahlen | 125 |
| Das Kontinuum besteht nicht nur aus Zahlen | 127 |
| Leibniz als Begriffs- und Symbolerfinder | 128 |
| Characteristica universalis | 128 |
| Von Leibniz erfundene Symbolik | 128 |
| Einige von Leibniz angeregte Konstruktionen und Begriffe | 130 |
| Die Erfindung der stetig Veränderlichen und der Epsilontik | 136 |
| Der Begriff der Veränderlichen | 136 |
| Die „Stetigkeit“ der Veränderung | 137 |
| Nochmals: Was ist für Leibniz eine Veränderliche? | 138 |
| Historiografischer Nachtrag I – die Indivisibeln | 140 |
| Das Indivisibel im scholastischen Kontinuumsbegriff | 140 |
| Cavalieri | 140 |
| Unverständnis | 143 |
| Torricellis Indivisibeln | 144 |
| Fermat, Roberval | 146 |
| Fazit | 146 |
| Historiografischer Nachtrag II – die Stetigkeit des Kontinuums | 147 |
| Historiografischer Nachtrag III – Newtons Fluxionsrechnung | 148 |
| Newtons mathematische Grundbegriffe | 148 |
| Newtons Verfahrensweise | 150 |
| Newtons Fluxionsmethode: die „Methode der verschwindenden Größen“ | 150 |
| Analyse | 160 |
| Rückblick | 161 |

3. Die Grundlagen der Algebraischen Analysis 163

| | |
|---|-----|
| Johann Bernoullis Kalkül der Differenziale | 163 |
| Eine vage Diffusion von Ideen | 163 |
| Leibniz' Publikation der Differenzialregeln | 163 |

| | |
|---|------------|
| Johann Bernoullis Differenzialkalkül | 166 |
| Zusammenfassung: Der Wechsel von der Geometrie zur Algebra | 179 |
| Die heftige Kontroverse zwischen Leibniz und Johann Bernoulli – vom geometrischen Differenzial zur unendlich kleinen Zahl? | 179 |
| Ein Nachtrag zur Kettenregel | 187 |
| l'Hospitals Umsetzung der Vorgabe Johann Bernoullis | 188 |
| Veränderliche und Konstante | 188 |
| l'Hospitals Begriff des Differenzials | 189 |
| Die Forderung | 190 |
| Differenzialregeln | 190 |
| l'Hospital ist konsequenter als Johann Bernoulli | 192 |
| Die Weitergabe von Johann Bernoullis Differenzialkalkül | 193 |
| Eulers Begriffe von Funktion und Zahl | 193 |
| Vorspiel | 193 |
| Die Inthronisierung des wichtigsten Begriffs der Analysis: Funktion | 194 |
| Eulers Algebra mit Größen | 216 |
| Eulers Zahlbegriff | 223 |
| Konvergenz | 245 |
| Stetigkeit | 253 |
| Eulers Denkmuster der Analysis: „Algebraische Analysis“ | 255 |
| Vier Weiterführungen | 255 |
| (1) d'Alemberts Begriff der Größe: eine Kritik an Euler | 255 |
| (2) Der Begriff der Größenordnung | 258 |
| (3) Die Taylorreihe in der Algebraischen Analysis – Lagrange | 261 |
| (4) Das Konvergenzverständnis von Lacroix | 267 |
| Was war die Algebraische Analysis? | 268 |
| Johann Bernoullis Beitrag | 268 |
| Eulers Denken der Algebraischen Analysis | 270 |
| | |
| 4. Die Begründung der Werte-Analysis | 275 |
| | |
| Vom Wandel der Dinge | 275 |
| Der doppelte Auftakt, Teil 1: Bernard Bolzano 1817 | 276 |
| Bolzanos Zielsetzung | 277 |
| Bolzanos Durchführung seines Programms | 281 |
| Bolzanos Funktionenlehre | 292 |
| Der doppelte Auftakt, Teil 2: Augustin-Louis Cauchy 1821 | 297 |
| Das Programm | 297 |
| Cauchys Stufenaufbau der Grundlagen der Analysis | 300 |
| Veränderliche, Grenze, Irrationalzahlen, Funktion, Funktionswert und unendlich Kleine | 303 |
| Stetigkeit und Konvergenz – die Definitionen | 314 |
| Differenzenverhältnis und Ableitung | 331 |

| | |
|--|------------|
| Das Differenzial bei Funktionen einer Veränderlichen | 336 |
| Das Integral | 339 |
| Rekapitulation der Revolution | 344 |
| 5. Das analytische Interregnum von 1817 bis 1872 | 351 |
| Nichtverstehen der Cauchy'schen Analysis | 351 |
| Niels Henrik Abel 1826 | 351 |
| Zusammenfassende Bewertung von Abels Kritik | 355 |
| Philipp Ludwig Seidel 1850 | 355 |
| Unsicherheiten beim Begriff des Funktionswerts | 362 |
| Ein einziger treuer Cauchy-Leser? | 362 |
| Dirichlets zögerliche Position | 363 |
| Riemanns klarer Schnitt beim Funktionsbegriff stößt das Tor zur Mengenlehre auf | 370 |
| Riemann übersieht den Sachverhalt der gleichmäßigen Konvergenz | 376 |
| Die Ambivalenz der Werte-Revolution | 380 |
| Gleiche Bestimmungen von Stetigkeit und Konvergenz | 380 |
| Zwei sehr unterschiedliche Funktionsbegriffe | 380 |
| Ergebnis | 381 |
| Unterschiedliche Methodiken | 382 |
| Cauchys ‚Grenzwertsprache‘ | 382 |
| Riemanns ‚Epsilontik‘ | 382 |
| ‚Epsilontik‘ contra ‚Grenzwertsprache‘ | 383 |
| Missverständnisse | 383 |
| Methodisches Fazit und eine fachliche Konsequenz | 387 |
| Weierstraß' Ringen um die Grundbegriffe der Analysis | 388 |
| Größe, Grenze, Kontinuum | 389 |
| Der „Satz vom Verdichtungspunkt“ | 399 |
| Weierstraß' Funktionsbegriff (im Wandel) | 402 |
| Weierstraß' hartnäckige Arbeit am Zahlbegriff | 415 |
| Ein veränderter Blick auf Weierstraß | 439 |
| 6. Konsolidierung (1) – Die Erfindung der reellen Zahlen im Jahr 1872 | 447 |
| Die Situation ante | 447 |
| Hankels Bestandsaufnahme zum Begriff der irrationalen Zahl im Jahr 1867 | 447 |
| Die Artikulation der Misere durch Eduard Heine | 452 |
| Rückblick: Weierstraß' Konstruktion | 454 |
| Cantors Blick auf Weierstraß' Konstruktion | 454 |
| Cantors Deutung von Weierstraß' Konstruktion | 456 |

| | |
|--|-----|
| Die Neuschöpfung – Variante 1: Cantor und Heine 1872 | 458 |
| Cantor: Zahlgrößen im weiteren Sinne | 458 |
| Eine Hierarchie neuer Zahlbereiche – Die Gleichheit | 463 |
| Heines Versuch der Reduktion der Hierarchie | 465 |
| Eine erste topologische Fassung des „Satzes von Bolzano-Weierstraß“ | 468 |
| Freges Kritik an Cantors und Heines Begriffsbildungen | 468 |
| Logische Unterscheidungen | 469 |
| Der ontologische Aspekt: Was ist „Zahl“? | 469 |
| Was ist „Gleichheit“? | 470 |
| Freges Kritik am <i>formalen</i> Zahlbegriff | 471 |
| Woher und warum hat Heine den Begriff der „Zahl“ als „Zeichen“? | 474 |
| Freges Ablehnung der neuen Relationen | 475 |
| Was hat Frege übersehen? – Der analytische Zugewinn des neuen Zahlbegriffs | 477 |
| Die Neuschöpfung – Variante 2: Dedekind 1872 | 479 |
| Nochmals Cantor 1872: Der Bezug zur Geometrie | 479 |
| Die Entstehung der Schrift | 481 |
| Dedekinds Vorgehen: Eine Analogie von Arithmetik und Geometrie | 482 |
| Die „Stetigkeit“ der geraden Linie | 483 |
| Die Schöpfung der irrationalen Zahlen | 488 |
| Reflexion | 496 |
| Freges Kritik an Dedekinds Konstruktion | 501 |
| Russells Glättung der Dedekind'schen Konstruktion | 504 |
| Nachtrag: Mérays Skizze aus dem Jahr 1869 | 508 |
| Zwei Prinzipien | 508 |
| „Fiktive Grenzen“ | 510 |
| Rekapitulation und Einschätzung | 513 |
| Drei Jahre später | 514 |
| Rückblick auf die Revolution des Zahlbegriffs | 517 |
| Welches neuen Konstruktionsmittels bedienen sich Cantor, Heine und Dedekind? – Die Einführung des „aktualen“ Unendlich in die Mathematik | 518 |
| Ausblick auf eine lange unterbliebene Revolution des Zahlbegriffs: | |
| Die Ω -Analysis 1958 | 519 |
| Rekapitulation der Herkunft des Cantor'schen Zahlbegriffs | 519 |
| Die Ω -rationalen Zahlen | 520 |
| Quasirationale Ω -Zahlen | 522 |
| Anordnungen der Ω -rationalen Zahlen | 523 |
| Drei verschiedene Arten des Größenvergleichs | 524 |
| Grenzwerte für Ω -rationale Zahlen | 532 |
| Warum nicht? | 538 |
| Eine intensionale Fassung des Zahlbegriffs: Husserl | 539 |
| Die Zielsetzung | 539 |
| Der Ausgangspunkt | 540 |

| | |
|---|------------|
| Die Unterscheidung von „Vielheit“ und „kollektive Verbindung“ | 541 |
| Zugängliche Zahlen | 545 |
| Symbolische Zahlen | 549 |
| Rechnen | 551 |
| Zur Bedeutung des dekadischen Zahlensystems | 557 |
| Ausblick | 559 |
| Die Axiomatisierung der reellen Zahlen durch Hilbert | 559 |
| „18 Axiome“ | 560 |
| Pro und contra axiomatische Methode | 564 |
| Standortbestimmung zum Zahlbegriff und Ausblick | 573 |
| Das Neue am Zahlbegriff seit 1872 | 574 |
| Sind die Ω -Zahlen die modernen Inkommensurablen? | 575 |
| Das Verschwinden der „unendlich kleinen“ Größen aus der Analysis | 576 |
| Die Abdankung des begrifflichen Denkens | 577 |
| Willkürliches Denken | 578 |
| Die Neugründung der Mathematik | 580 |
| | |
| 7. Konsolidierung (2) – Die Suche nach einem Substrat für den Funktionsbegriff | 581 |
| | |
| Heine: Funktionenlehre über dem neuen Zahlbegriff | 581 |
| Eine erste Konsequenz für die Funktionenlehre über dem neuen Zahlbegriff | 582 |
| Eine zweite Konsequenz | 583 |
| Der Zwischenwertsatz | 585 |
| Die gleichmäßige Stetigkeit | 585 |
| Nach Riemann lange nichts Neues | 586 |
| Der Gegensatz zwischen Weierstraß' und Riemanns Funktionsbegriff | 586 |
| Die Tradition der deutschsprachigen Literatur folgt Riemann | 588 |
| Die französische Tradition | 597 |
| Der offizielle Entwicklungsstand des Funktionsbegriffs am 10. August 1899 | 606 |
| Klein: Mathematik als Theorie der Naturerscheinungen | 611 |
| Mathematik vom erkenntnistheoretischen Standpunkt aus | 612 |
| Zwei grundlegende Sätze in der Sprache der Mengenlehre | 623 |
| Die unabhängig Veränderliche | 624 |
| Der Begriff der Funktion | 625 |
| Stetigkeit | 627 |
| Das bestimmte Integral | 635 |
| Die vernünftigen Funktionen | 635 |
| Zwischenbilanz im Jahr 1913 | 637 |
| Vorspiel: Georg Cantor 1895 | 638 |
| Nachtrag: Cantors Mengenbegriff | 638 |

| | |
|---|------------|
| „Funktion“ zwischen „Mengen“ | 638 |
| Pasch: Die Funktion als Menge (1) | 639 |
| Paschs Anfangsbegriffe | 639 |
| Reihe und Menge | 642 |
| Wert und Veränderliche | 643 |
| Argument, Abhängigkeit und Funktion | 644 |
| Zweierlei Stetigkeit | 648 |
| Hausdorff: Die Erfindung der Mengen-Analysis – die Funktion als Menge (2) | 650 |
| Richtigkeit vor Plausibilität | 650 |
| Der mengentheoretische Begriff „Funktion“ | 651 |
| Drei verschiedene Begründungsweisen der ‚Mengen-Analyse‘: je nach Geschmack | 653 |
| Topologie als Umgebungssystem | 654 |
| Aus eins mach zwei: Von der „Grenze“ zu „Limes“ und „Häufungspunkt“ | 656 |
| „Stetigkeit“ als topologischer Begriff | 657 |
| Was der Punktmengen-Analyse nach Hausdorff fehlt | 658 |
| Metrischer Raum | 659 |
| Ein Fazit für ‚Epsilonik‘ und ‚Grenzwertsprache‘ | 661 |
| Nach dem großen Kulturbruch | 661 |
| Eine erste Monographie: Hahn 1921 | 661 |
| Kurze Bemerkungen zur Lehrbuchliteratur | 663 |
| Standortbestimmung zum Funktionsbegriff und Ausblick | 666 |
| Rückblick auf die Entwicklung des Funktionsbegriffs in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts | 666 |
| Ontologische Standortbestimmung der heutigen Analysis | 666 |
| | |
| Ausklang: Das aktuelle Unendlich – der philosophische Joker in der heutigen Mathematik | 671 |
| Umbrüche des mathematischen Denkens | 671 |
| Wie ist es um die Strenge der Mathematik bestellt? | 675 |
| Welche Eigenschaften hat das aktuelle Unendlich? | 676 |
| Beispiel Logik | 676 |
| Beispiel Arithmetik | 677 |
| Ein Drittes gibt es nicht | 677 |
| Frühere Betrachtungsweisen | 678 |
| Bolzano | 678 |
| Dedekind und Cantor | 679 |
| Standard- und Nichtstandard-Analysis | 680 |

| | |
|--|-----|
| Strenge in der Mathematik: eine auf Willkür gegründete Notwendigkeit | 680 |
| Die Macht der Geschichte | 681 |
| Eine Lehre | 681 |
| (Mathematische) Wahrheiten | 682 |
| Zum Abschied | 683 |

Verzeichnisse

| | |
|-----------|-----|
| Literatur | 685 |
| Personen | 721 |
| Technik | 731 |
| Sachen | 735 |