

Philipp Möhrke · Bernd-Uwe Runge

# Arbeiten mit Messdaten

Eine praktische Kurzeinführung nach  
GUM



Springer Spektrum

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b> .....	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Messen</b> .....	<b>5</b>
2.1	Messung: Zahlenwert und Einheit .....	5
2.2	Das Internationale Einheitensystem SI .....	7
2.3	Schätzen .....	10
2.4	Auch Messwerte sind unsicher .....	11
2.5	Zusammenfassung und Fragen .....	12
2.5.1	Zusammenfassung .....	12
2.5.2	Fragen .....	13
<b>3</b>	<b>Messergebnisse</b> .....	<b>15</b>
3.1	Darstellung von Messergebnissen .....	15
3.1.1	Punkte auf der Zahlengeraden .....	15
3.1.2	Intervall auf der Zahlengeraden .....	17
3.1.3	Histogramm .....	18
3.1.4	Exkurs: Bernoulli-Experiment und Binomialverteilung .....	19
3.1.5	Quellen der Streuung .....	20
3.2	Kenngrößen der Messreihe .....	21
3.2.1	Mittelwert .....	21
3.2.2	Standardabweichung der Stichprobe .....	22
3.2.3	Standardabweichung des Mittelwerts .....	23
3.2.4	Vorteil der Mehrfachmessung .....	25
3.3	Anwendung: Ermittlung von Bestwert und Messunsicherheit ....	26

3.4	Vom Histogramm zur Verteilung .....	28
3.4.1	Gauß-Verteilung .....	29
3.4.2	Kleine Messreihen .....	33
3.5	Verteilungen schätzen .....	33
3.5.1	Rechteckverteilung – Ablesen einer digitalen Anzeige .....	34
3.5.2	Dreiecksverteilung – Ablesen einer analogen Anzeige .....	36
3.6	Nomenklatur nach GUM .....	39
3.7	Poisson-Verteilung – Unsicherheit von Zählereignissen .....	40
3.8	Wahrer Wert, Fehler & Co. ....	41
3.8.1	Fehler .....	41
3.8.2	Wahrer Wert .....	42
3.8.3	Systematischer Fehler .....	42
3.9	Zusammenfassung und Fragen .....	42
3.9.1	Zusammenfassung .....	42
3.9.2	Fragen .....	43
<b>4</b>	<b>Angabe von Messergebnissen .....</b>	<b>45</b>
4.1	Signifikante Stellen .....	45
4.1.1	Regeln für die Wahl der Stellenzahl .....	45
4.1.2	Begründung für die Wahl der Stellenzahl .....	46
4.2	Runden von Zahlen .....	48
4.2.1	Kaufmännisches Runden .....	48
4.2.2	Wissenschaftliches Runden .....	49
4.3	Schreibweisen für Unsicherheiten .....	50
4.3.1	Angabe eines Überdeckungsintervalls .....	52
4.4	Zusammenfassung und Fragen .....	54
4.4.1	Zusammenfassung .....	54
4.4.2	Fragen .....	55
<b>5</b>	<b>Modelle .....</b>	<b>57</b>
5.1	Mathematische Formulierung eines Modells .....	58
5.1.1	Grafische Darstellung von Modellen .....	60
5.2	Bestimmung des Modells .....	61
5.2.1	Teilmodelle .....	62
5.2.2	Ideale Messung – Prozessgleichung .....	63
5.2.3	Reale Messung .....	64
5.2.4	Informationen zu Messgeräten .....	65
5.3	Beispiel .....	67

---

5.4	Zusammenfassung und Fragen	69
5.4.1	Zusammenfassung	69
5.4.2	Fragen	69
<b>6</b>	<b>Kombination von Messergebnissen</b>	<b>71</b>
6.1	Funktionen einer Variable	72
6.1.1	Berechnung der Verteilung	72
6.1.2	Lineare Näherung für die Unsicherheit der Ausgangsgröße	75
6.2	Funktionen mehrerer Variablen	80
6.2.1	Berechnung der Verteilung für unkorrelierte Größen	84
6.2.2	Lineare Näherung für die Unsicherheit der Ausgangsgröße für unkorrelierte Größen	86
6.2.3	Freiheitsgrade kombinierter Größen – Welch-Satterthwaite-Formel	90
6.2.4	Dokumentation der Ergebnisse	91
6.2.5	Erweiterte Unsicherheit	92
6.3	Beispiele	95
6.4	Zusammenfassung und Fragen	101
6.4.1	Zusammenfassung	101
6.4.2	Fragen	101
<b>7</b>	<b>Anpassung eines Modells an Messwerte</b>	<b>103</b>
7.1	Die Methode der kleinsten Abweichungsquadrate	104
7.2	Mittelwert	106
7.3	Gewichteter Mittelwert	107
7.4	Ausgleichsgerade	109
7.5	Ausgleichsgerade mit Gewichtung der Messwerte	110
7.6	Anpassung einer allgemeinen Funktion	111
7.7	Zusammenfassung und Fragen	112
7.7.1	Zusammenfassung	112
7.7.2	Fragen	112
<b>8</b>	<b>Bewertung von Messergebnissen</b>	<b>113</b>
8.1	Qualitativer Vergleich	114
8.2	Quantitativer Vergleich	115
8.3	Beispiel	119
8.4	Zusammenfassung und Fragen	119
8.4.1	Zusammenfassung	119
8.4.2	Fragen	122

---

<b>9</b>	<b>Lösungen</b> .....	123
9.1	Umgang mit den Lösungen .....	123
9.2	Lösungen zu Kap. 2 .....	123
9.3	Lösungen zu Kap. 3 .....	124
9.4	Lösungen zu Kap. 4 .....	124
9.5	Lösungen zu Kap. 5 .....	125
9.6	Lösungen zu Kap. 6 .....	125
9.7	Lösungen zu Kap. 7 .....	126
9.8	Lösungen zu Kap. 8 .....	126
	<b>Literatur</b> .....	127
	<b>Stichwortverzeichnis</b> .....	129