

---

Dietrich Braess

# Finite Elemente

Theorie, schnelle Löser und Anwendungen  
in der Elastizitätstheorie

5., überarbeitete Auflage



Springer Spektrum

# Inhaltsverzeichnis

Vorwort zur vierten Auflage	x
Vorwort zur ersten Auflage	xi
Bezeichnungen	xiii
<i>Kapitel I</i>	
<i>Einführung</i>	
	1
§ 1. Beispiele und Typeneinteilung	2
Beispiele 2 — Typeneinteilung 7 — Sachgemäß gestellte Probleme 8 — Aufgaben 10	
§ 2. Maximumprinzip	11
Beispiele 12 — Folgerungen 13 — Aufgaben 14	
§ 3. Differenzenverfahren	15
Diskretisierung 15 — Diskretes Maximumprinzip 18	
§ 4. Eine Konvergenztheorie für Differenzenverfahren	21
Konsistenz 21 — Lokaler und globaler Fehler 21 — Grenzen der Konvergenztheorie 24 — Aufgaben 25	
<i>Kapitel II</i>	
<i>Konforme Finite Elemente</i>	
	26
§ 1. Sobolev-Räume	27
Einführung der Sobolev-Räume 27 — Die Friedrichssche Ungleichung 29 — Singularitäten von $H^1$ -Funktionen 30 — Kompakte Einbettungen 31 — Aufgaben 31	
§ 2. Variationsformulierung elliptischer Randwertaufgaben	33
Variationsformulierung 34 — Reduktion auf homogene Randbedingungen 35 — Existenz von Lösungen 37 — Inhomogene Randbedingungen 40 — Aufgaben 41	
§ 3. Die Neumannsche Randwertaufgabe. Ein Spursatz	42
Elliptizität in $H^1$ 42 — Randwertaufgaben mit natürlichen Randbedin- gungen 43 — Neumannsche Randbedingungen 44 — Gemischte Randbedin- gungen 45 — Beweis des Spursatzes 45 — Praktische Konsequenzen aus dem Spursatz 48 — Aufgaben 49	
§ 4. Ritz-Galerkin-Verfahren und einfache Finite Elemente	51
Modellproblem 54 — Aufgaben 56	

§ 5. Einige gebräuchliche Finite Elemente	57
Forderungen an die Triangulierung 58 — Bedeutung der Differenzierbarkeitseigenschaften 59 — Dreieckelemente mit vollständigen Polynomen 61 — Bemerkung zu $C^1$ -Elementen 62 — Bilineare Elemente 64 — Quadratische Viereckelemente 66 — Affine Familien 67 — Zur Auswahl von Elementen 70 — Aufgaben 70	
§ 6. Approximationssätze	72
Der Fragenkreis um das Bramble–Hilbert–Lemma 73 — Dreieckelemente mit vollständigen Polynomen 74 — Bilineare Viereckelemente 78 — Inverse Abschätzungen 79 — Cléments Operator 80 — Anhang: Zur Optimalität der Abschätzungen 82 — Aufgaben 83	
§ 7. Fehlerabschätzungen für elliptische Probleme zweiter Ordnung	85
Bemerkungen zu Regularitätssätzen 85 — Fehlerabschätzungen in der Energienorm 86 — $L_2$ -Abschätzungen 87 — Eine einfache $L_\infty$ -Abschätzung 89 — Der $L_2$ -Projektor 90 — Aufgaben 91	
§ 8. Rechentechnische Betrachtungen	92
Das Aufstellen der Steifigkeitsmatrix 92 — Innere Kondensation 94 — Aufwand für das Aufstellen der Matrix 95 — Rückwirkung auf die Wahl des Netzes 95 — Teilweise Netzverfeinerungen 95 — Zur Lösung des Neumann-Problems 97 — Aufgaben 97	
<i>Kapitel III</i>	
<i>Nichtkonforme und andere Methoden</i>	
§ 1. Abstrakte Hilfssätze und eine einfache Randapproximation	100
Die Lemmas von Strang 100 — Dualitätstechnik 102 — Das Crouzeix–Raviart–Element 103 — Eine einfache Approximation krummliniger Ränder 106 — Modifikationen beim Dualitätsargument 108 — Aufgaben 110	
§ 2. Isoparametrische Elemente	111
Isoparametrische Dreieckelemente 111 — Isoparametrische Viereckelemente 113 — Aufgaben 115	
§ 3. Weitere funktionalanalytische Hilfsmittel	116
Negative Normen 116 — Adjungierte Operatoren 118 — Ein abstrakter Existenzsatz 118 — Ein abstrakter Konvergenzsatz 120 — Beweis von Satz 3.4 121 — Aufgaben 122	
§ 4. Sattelpunktprobleme	123
Sattelpunkte und Minima 123 — Die inf-sup-Bedingung 124 — Gemischte Finite-Element-Methoden 128 — Fortin-Interpolation 130 — Sattelpunktprobleme mit Strafterm 131 — Typische Anwendungen 135 — Aufgaben 136	

§ 5. Gemischte Methoden für die Poisson-Gleichung	138
Die Poisson-Gleichung als gemischtes Problem 138 — Das Zwei-Energien-Prinzip — Das Raviart–Thomas–Element 142 — Interpolation mit Raviart–Thomas–Elementen 143 — Implementierung und nachträgliche Verbesserung 146 — Gitterabhängige Normen für das Raviart–Thomas–Element 147 — Der Aufweichungs-Effekt gemischter Methoden 148 — Aufgaben 150	
§ 6. Die Stokessche Gleichung	152
Variationsformulierung 153 — Die inf-sup-Bedingung 154 — Fast inkompressible Strömungen 156 — Aufgaben 157	
§ 7. Finite Elemente für das Stokes-Problem	158
Ein instabiles Element 158 — Das Taylor–Hood–Element 163 — Das MINI-Element 164 — Das divergenzfreie nichtkonforme $P_1$ -Element 166 — Aufgaben 167	
§ 8. A posteriori Abschätzungen	168
Residuale Schätzer 170 — Untere Abschätzungen 172 — Bemerkungen zu anderen Schätzern 175 — Lokale Gitterverfeinerungen und Konvergenz 175	
§ 9. A Posteriori Schätzer über das Zwei-Energien-Prinzip	177
Aufgaben 183	

#### *Kapitel IV*

<i>Die Methode der konjugierten Gradienten</i>	185
§ 1. Klassische Iterationsverfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme	186
Stationäre lineare Prozesse 186 — Gesamt- und Einzelschrittverfahren 188 — Das Modellproblem 191 — Overrelaxation 191 — Aufgaben 194	
§ 2. Gradientenverfahren	195
Das allgemeine Gradientenverfahren 195 — Gradientenverfahren und quadratische Funktionen 196 — Konvergenzverhalten bei Matrizen mit großer Kondition 198 — Aufgaben 199	
§ 3. Verfahren mit konjugierten Gradienten und konjugierten Residuen	200
Der Algorithmus 202 — Analyse des cg-Verfahrens als optimales Verfahren 204 — Verfahren der konjugierten Residuen 206 — Indefinite und unsymmetrische Matrizen 207 — Aufgaben 208	
§ 4. Vorkonditionierung	209
Vorkonditionierung durch SSOR 212 — Vorkonditionierung durch ILU 213 — Bemerkungen zur Parallelisierung 215 — Nichtlineare Probleme 216 — Aufgaben 217	
§ 5. Sattelpunktprobleme	220
Der Uzawa-Algorithmus und seine Varianten 220 — Eine Alternative 222 — Aufgaben 223	

*Kapitel V*  
*Mehrgitterverfahren* 224

- § 1. Mehrgitterverfahren für Variationsaufgaben 225  
 Glättungseigenschaften klassischer Iterationsverfahren 225 — Die Mehrgitter-Idee 226 — Der Algorithmus 227 — Der Übergang zwischen den Gittern 230 — Aufgaben 234
- § 2. Konvergenz von Mehrgitterverfahren 235  
 Diskrete Normen 236 — Verknüpfung mit den Sobolev-Normen 238 — Approximationseigenschaft 240 — Konvergenzbeweis für das Zweigitterverfahren 241 — Andere Konzepte 242 — Aufgaben 244
- § 3. Konvergenz bei mehreren Ebenen 245  
 Eine Rekursionsformel für den W-Zyklus 245 — Die Verschärfung für die Energienorm 246 — Der Konvergenzbeweis für den V-Zyklus 248 — Aufgaben 251
- § 4. Berechnung von Startwerten 252  
 Bestimmung von Startwerten 253 — Komplexität 254 — Mehrgitterverfahren mit wenigen Ebenen 255 — Das cascadische Mehrgitterverfahren 256 — Aufgaben 257
- § 5. Analyse von Mehrgitterverfahren 258  
 Das Schwarzsche alternierende Verfahren 259 — Algorithmen mit Teilraumzerlegungen aus algebraischer Sicht 261 — Hypothesen 262 — Direkte Folgerungen 263 — Konvergenz der multiplikativen Methode 264 — Nachweis der Hypothese A.1 266 — Lokale Gitterverfeinerungen 267 — Aufgaben 268
- § 6. Nichtlineare Probleme 269  
 Mehrgitter-Newton-Verfahren 270 — Das nichtlineare Mehrgitterverfahren 271 — Startwerte 273 — Aufgaben 274

*Kapitel VI*  
*Finite Elemente in der Mechanik elastischer Körper* 275

- § 1. Einführung in die Elastizitätstheorie 276  
 Kinematik 276 — Gleichgewichtsbedingungen 278 — Die Piola-Transformation 280 — Materialgesetze 281 — Lineare Materialgesetze 285
- § 2. Hyperelastische Materialien 287  
 Aufgaben 289
- § 3. Lineare Elastizitätstheorie 290  
 Das Variationsproblem 290 — Die reine Verschiebungsmethode 294 — Die gemischte Methode nach Hellinger und Reissner 297 — Die gemischte Methode nach Hu–Washizu 299 — Aufgaben 301

§ 4. Locking	303
Probleme mit kleinem Parameter 303 — Locking beim Timoschenko-Balken 306 — Fast inkompressibles Material 309 — Aufgabe 313	
§ 5. Scheiben	314
Ebener Spannungszustand 314 — Ebener Verzerrungszustand 315 — Scheibenelemente 315 — Das PEERS-Element 316 — Aufgaben 321	
§ 6. Balken und Platten: Dimensionsreduktion	322
Die Hypothesen 322 — Modifikation der Hypothese H2 zu ihrer Rechtfertigung 325 — Reduktion des (1, 1, 2)-Modells 328 — Anwendung des Zwei-Energien-Prinzips auf Platten 329 — Bemerkungen zu Balken 332	
§ 7. Finite Elemente für die Kirchhoff-Platte	333
Gemischte Methoden für die Kirchhoff-Platte 332 — DKT-Elemente 335 — Aufgaben 340	
§ 8. Die Reissner-Mindlin-Platte	341
Die Helmholtz-Zerlegung 342 — Der gemischte Ansatz mit Helmholtz-Zerlegung 344 — MITC-Elemente 345 — Der Ansatz ohne Helmholtz-Zerlegung 349 — Aufgaben 352	
Literatur	353
Sachverzeichnis	365